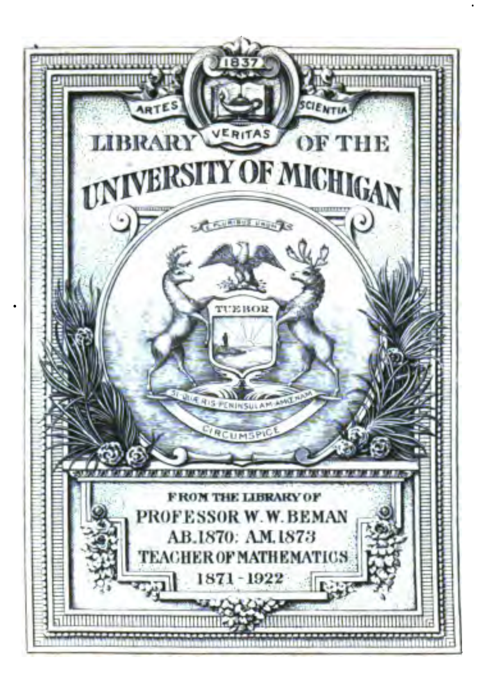
Herder … isgau.



BAUMHAUE… …ch an land-
wirtschaf… …nie. *Zweite*
Auflage. … *M.* 1.85. —
II. Teil … der land-
wirtschaf… (VIII u.
78 S.) …

BONGAERTZ… …berechnung
für Präp… und Mittel-
schulen. … …eb. *M.* 1.50.

BRUGIER, G… …urzgefaſster
Poetik. … …en u. einem
Glossar. … 6; geb. in
Halbfran… (VI, 74 S.
u. 1 Tal…

CAESARIS, … …ecensuit et
verborum … *Gitlbauer*.
Pars … …b. *M.* 1.50.
Pars … …eb. *M.* 1.50.

CORNELII N… …m indicem
addidit I… *M.* 1; geb.
M. 1.30.

FECHT, Dr. … Mit einem
alphabeti… …b. *M.* 1.50.
— **Griechisch**… …eb. *M.* 1.85.

FOX, W., S. J., **Demosthenes' Rede für die Megalopoliten.** Für den Schulgebrauch bearbeitet. A. *Text.* 12⁰. (10 S.) 10 *Pf.* B. *Kommentar.* 12⁰. (48 S.) 40 *Pf.*

FUSS, K., und **G. HENSOLD, Lehrbuch der Physik** für den Unterricht an Lehrerbildungsanstalten und Mittelschulen. Mit vielen Übungsaufgaben und 331 Abbildungen. gr. 8⁰. (XII u. 458 S.) *M.* 4.50; geb. *M.* 4.95.

GEISTBECK, Dr. **M., Leitfaden der mathematischen und physikalischen Geographie** für Mittelschulen u. Lehrerbildungs-Anstalten. *Dreizehnte Auflage,* mit vielen Illustrationen. gr. 8⁰. (VIII u. 166 S.) *M.* 1.50; geb. *M.* 1.85.

GIETMANN, G., S. J., **Die Aussprache des Englischen** in systematischer Vollständigkeit, einschlieſslich der Regeln über Quantität und Accent. 8⁰. (IV u. 108 S.) *M.* 1.50.

HENSE, Dr. J., **Deutsches Lesebuch** für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Auswahl deutscher Poesie und Prosa mit litterarhistorischen Übersichten und Darstellungen. gr. 8⁰. **I. Teil: Dichtung des Mittelalters.** *Zweite Auflage.* (XII u. 218 S.) *M.* 1.60; geb. *M.* 2.05. — **II. Teil: Dichtung der Neuzeit.** *Zweite Auflage.* (XII u. 438 S.) *M.* 3.20; geb. *M.* 3.70. — **III. Teil: Beschreibende und lehrende Prosa.** (VIII u. 532 S.) *M.* 3.60; geb. *M.* 4.20.

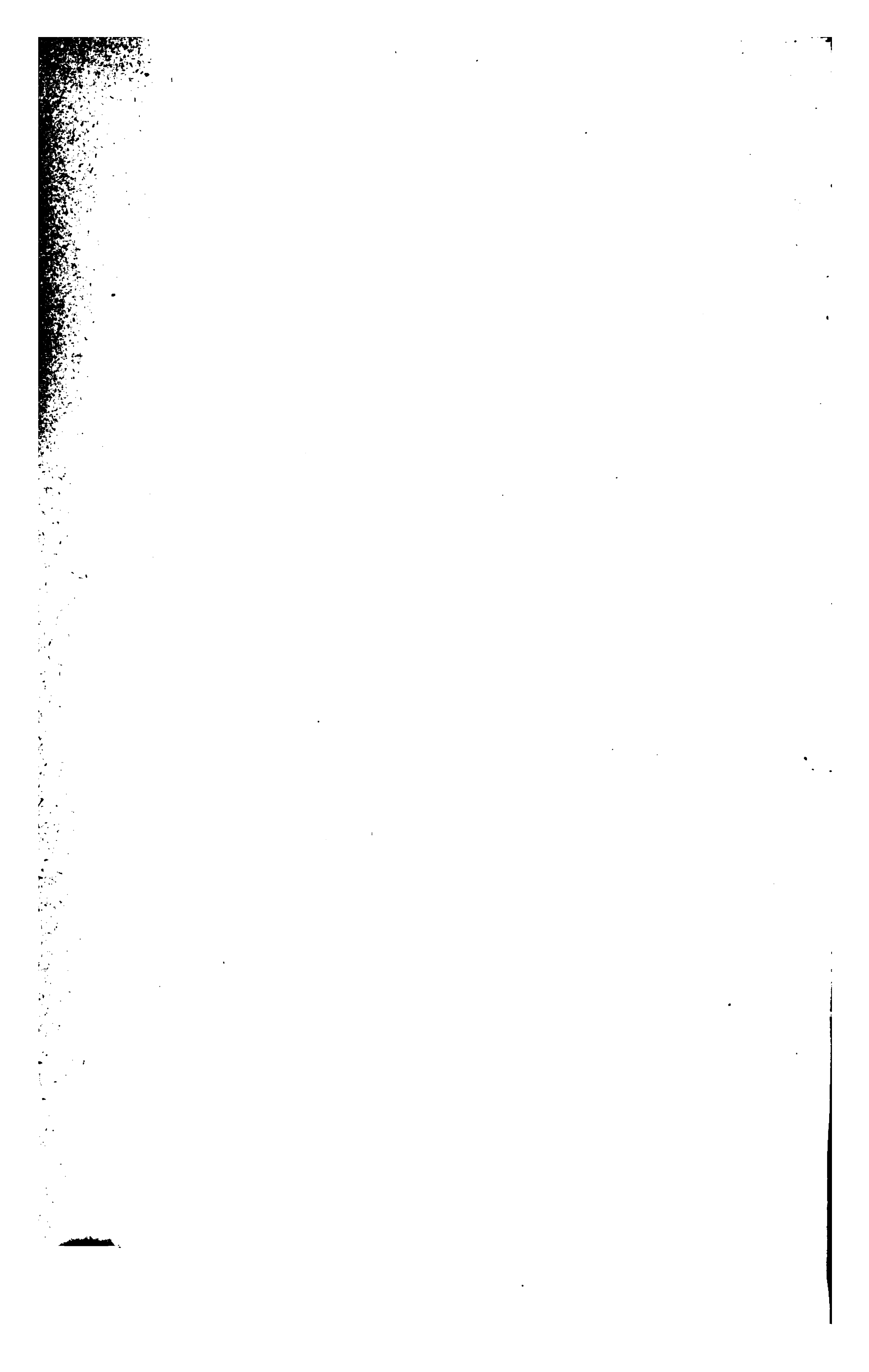
HRIBAR, E., **Elemente der ebenen Trigonometrie.** Zum Schulgebrauch und zum Selbststudium dargestellt. Mit 44 Abbildungen. gr. 8⁰. (VIII u. 100 S.) *M.* 1.20; geb. *M.* 1.50.

KRASS, Dr. M., und Dr. **H. LANDOIS, Lehrbuch für den Unterricht in der Naturbeschreibung.** Für Gymnasien, Realgymnasien und andere höhere Lehranstalten bearbeitet. gr. 8⁰. **I. Teil: Lehrbuch der Zoologie.** Mit 219 Abbildungen. *Dritte Auflage.* (XVI u. 340 S.) *M.* 3.30; geb. *M.* 3.70. — **II. Teil: Lehrbuch der Botanik.** Mit 268 Abbildungen. *Dritte Aufl.* (XVI u. 292 S.) *M.* 3; geb. *M.* 3.40. — **III. Teil: Lehrbuch der Mineralogie.** Mit 108 Abbildungen u. 3 Tafeln Krystallformennetze. (X u. 128 S.) *M.* 1.60; geb. *M.* 1.95.

— **Der Mensch und die drei Reiche der Natur** in Wort und Bild für den Schulunterricht in der Naturgeschichte. gr. 8⁰. **I. Teil: Der Mensch und das Tierreich.** Mit 184 Abbildungen. *Zehnte Aufl.* (XVI u. 246 S.) *M.* 2.10; geb. *M.* 2.45. **II. Teil: Das Pflanzenreich.** Mit 215 Abbildungen. *Siebente Aufl.* (XII u. 218 S.) *M.* 2.10; geb. *M.* 2.45. **III. Teil: Das Mineralreich.** Mit 88 Abbildungen. *Vierte Aufl.* (XII u. 132 S.) *M.* 1.40; geb. *M.* 1.75.



Stereometrie für höhere Lehranstalten.



Stereometrie

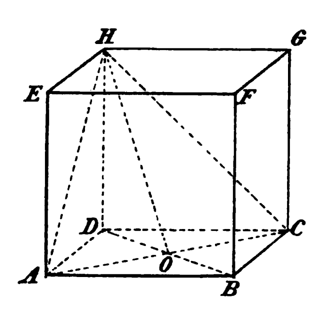
für höhere Lehranstalten.

Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet

von

Karl Schwering,

Direktor des stiftischen Gymnasiums in Düren.



Mit 41 Figuren.

Freiburg im Breisgau.

Herdersche Verlagshandlung.

1894.

Zweigniederlassungen in *Straſsburg, München* und *St. Louis,* Mo.

Wien I, Wollzeile 33: B. Herder, Verlag.

Hiervon getrennt und einzeln käuflich der **erste Lehrgang** u. d. T.:

Anfangsgründe der Raumlehre für sechsstufige Schulen und Lehrerseminare. gr. 8^0. (16 S.) 20 *Pf.*

Buchdruckerei der Herderschen Verlagshandlung in Freiburg.

Vorwort.

Die vorliegende Darstellung der Stereometrie schliefst sich nach Anordnung und Inhalt den neuen Lehrvorschriften an. Im übrigen habe ich die Grundsätze, welche mich bei Abfassung der Schulbücher leiteten, im Vorworte zur „Arithmetik“, zur „Trigonometrie“ und zu den „100 Aufgaben“ mit hinreichender Ausführlichkeit angegeben.

Es sei mir nur gestattet, hier zu betonen, dafs die Stereometrie ihrem Wesen nach einen durchaus anschaulichen Unterricht verlangt. Sorgfältig gezeichnete Figuren des Lehrbuches und Zeichnungen in einer Ebene, welche der Lernende anfertigt, sind vortreffliche und in ihrer Art unersetzliche Beihülfen. Allein aber genügen sie nicht, wenigstens nicht für den Anfänger. Dieser kann nur an wirklich vorhandenen Körpern die erforderlichen Grundanschauungen gewinnen und von diesen aus zur Begriffsbildung fortschreiten. Freilich genügen zur Erreichung dieses Zweckes schon die einfachsten Hülfsmittel, welche der Schüler teils in seiner Umgebung wahrnimmt, teils selbst mit leichter Mühe herstellt. Ich habe nicht verfehlt, hierauf gelegentlich (S. 1. 2. 8. 12 u. s. w.) den Lernenden hinzuweisen.

Indes darf nicht verkannt werden, dafs durch geeignete Körpersammlungen die Arbeit für Lehrer und Schüler sehr vereinfacht wird. Dieselben sind geeignet, scharfe Vorstellungen

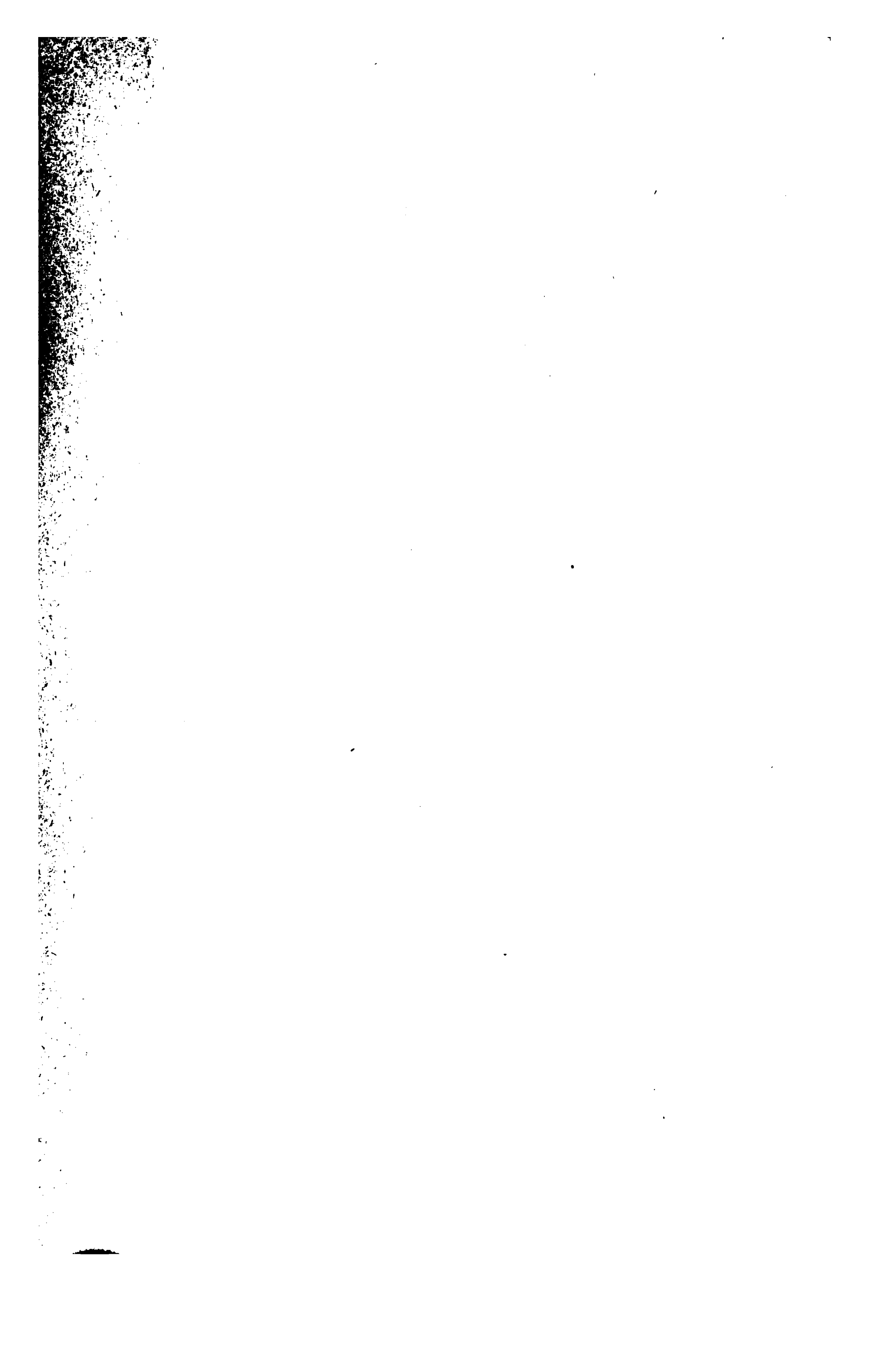
räumlicher Verhältnisse zu vermitteln und möglichen Irrungen vorzubeugen; sie wecken erfahrungsmäſsig das Interesse des Lernenden und erleichtern ihm wesentlich die Nachbildung des Gesehenen.

Da nun die mir bekannten Sammlungen dieser Art mich aus verschiedenen Gründen nicht ganz befriedigten, so bin ich mit der rühmlichst bekannten Lehrmittelanstalt von J. Ehrhard & Co. in Bensheim (Hessen) dieserhalb in Verbindung getreten. Dieselbe liefert eine nach meinen Angaben zusammengestellte Körpersammlung zum Preise von 50 *M.*

Düren, im Januar 1894.

Der Verfasser.

Inhalt.



Erster Lehrgang.

§ 1. Vorbegriffe.

Der durch die nebenstehende Figur (1) dargestellte Körper heifst ein regelmäfsiges Hexaeder oder ein Würfel. Wir gewahren an demselben sechs Seitenflächen. Diese Seitenflächen sind Quadrate. Ferner bemerken wir zwölf Kanten, die Seiten der Quadrate, und acht Ecken. Jede Kante ist zwei Seitenflächen gemeinsam, und in jeder Ecke laufen drei Kanten und ebensoviele Seitenflächen zusammen.

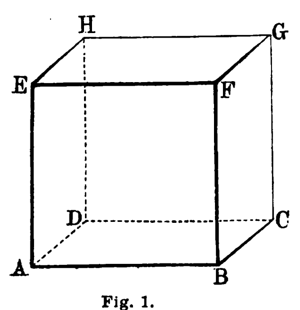


Fig. 1.

Die am wirklichen Würfel parallelen Kanten sind auch in unserer Zeichnung parallel.

Denken wir uns den Würfel hohl und längs der Seitenkanten *HD, EA, FB, GC* sowie längs der die obere Fläche begrenzenden Kanten mit alleiniger Ausnahme von *EF* Schnitte geführt, so können wir die Seitenflächen *EADH* um *AD, HDCG* um *DC, FBCG* um *BC* und die beiden durch *EF* zusammenhängenden übrigen Seitenflächen um *AB* herumklappen. Es entsteht dann in der Ebene *DABC* eine kreuzförmige Figur, welche sich mit Zirkel und Lineal zeichnen läfst. Umgekehrt kann man aus dieser kreuzförmigen Figur den hohlen Würfel entstehen lassen.

Betrachten wir jetzt unser Schulzimmer. Wir sehen ab von den Öffnungen und Hervorragungen, welche durch Thüren, Fenster, Sockel, Stuckarbeit u. s. w. an den Wänden entstanden sind. Vielmehr denken wir uns Fussboden, Wände und Decke durchaus eben. Alsdann zeigt der Raum unseres Zimmers grofse Ähnlichkeit mit der Gestalt des Würfels. Wir haben ein rechtwinkliges Parallelepipedon vor uns; es hat sechs Seiten-

flächen, zwölf Kanten und acht Ecken; aber die Seitenflächen sind Rechtecke, nicht Quadrate; Höhe, Länge und Breite sind bei unserem Schulraum verschieden, nicht gleich wie beim Würfel.

Es ist jetzt besonders notwendig, die Forderung, daſs die Seitenflächen (auch Grundfläche und Decke kann man so nennen) eben sein sollen, näher zu erklären. Legt man ein Lineal auf den Tisch, auf die Schulschreibtafel, so schmiegt es sich in allen seinen Punkten den genannten Flächen genau an. Verschiebt man es nun beliebig auf dem Tische, auf der Schreibtafel, so bleibt dieses Verhalten ungeändert, das Lineal liegt seiner ganzen Länge nach mit allen Punkten dem Tische oder der Schreibtafel fest an. Ist dagegen die Tischfläche nicht vollkommen eben, so werden die Unebenheiten derselben durch das Verschieben des Lineals deutlich erkennbar. Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht schwer, den Begriff der Ebene zu gewinnen. Es ist diejenige Fläche, in welcher man eine gerade Linie in willkürlicher Weise verschieben kann. Auch jede Drehung ist zulässig. Hat eine gerade Linie mit einer Ebene zwei Punkte gemeinsam, so liegt sie ganz in der Ebene.

Eine gerade Linie ist von unbegrenzter Länge. Folglich ist auch die Ebene nach allen Seiten hin unbegrenzt, da man jede gerade Linie in der Ebene beliebig verschieben und drehen kann.

Zwei Ebenen können auch zu einander parallel sein. Der Fuſsboden und die Decke unseres Zimmers sind parallele Ebenen; ebenso in Fig. 1 die Ebenen $EFGH$ und $ABCD$.

Wie zwei parallele Geraden überall gleichen Abstand voneinander haben, so auch zwei parallele Ebenen. Wenn man von verschiedenen Punkten der Decke an einem Bindfaden eine Bleikugel herabläſst, bis sie den Fuſsboden berührt, so wird bei jedem Versuche der Faden eine gleiche Länge zeigen.

Die beiden Ebenen $AEHD$ und $GCDH$ haben die Kante DH gemeinsam. Dies kann man auch so ausdrücken: Jene beiden Ebenen schneiden sich, und zwar in der Geraden DH. Die Gerade DH ist der Durchschnitt, die Schnittlinie der beiden Ebenen.

§ 2. Einige Aufgaben.

1. Man bestimme das Dreieck HAC (Fig. 1) durch Zeichnung und Rechnung.

Lösung. Die Seiten des Dreiecks sind Diagonalen von Quadraten mit der Seite $a = AB$. Folglich ist $HA = AC = CH = a\sqrt{2}$, und das Dreieck ist sofort durch Zeichnung mit Zirkel und Lineal in einer Ebene darstellbar, wenn a gegeben ist. Verbindet man H mit der Mitte von AC, welche mit O (Fig. 2) bezeichnet werden möge, so wird $HO = \frac{a}{2}\sqrt{6}$.

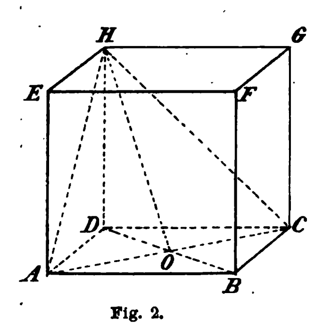


Fig. 2.

2. Man bestimme den Durchschnitt $HDBF$ durch Zeichnung und Rechnung.

Lösung. Durch die vorige Aufgabe gewannen wir HO. Die beiden Diagonalen DB und AC halbieren sich gegenseitig, treffen sich also in O. Folglich ist HDO aus seinen drei Seiten bestimmbar. Da nun

$$DO = \frac{a}{2}\sqrt{2},\ DH = a,\ HO = \frac{a}{2}\sqrt{6},$$

so ist $HO^2 = DO^2 + DH^2$, also nach der Umkehrung des Pythagoreischen Satzes Dreieck HDO in D rechtwinklig. Folglich ist $HDBF$ ein Rechteck, dessen Seiten $HD = a$, $DB = a\sqrt{2}$ bekannt sind.

3. Man bestimme die Diagonale HB des Würfels.

Lösung. Da Dreieck HDB bei B rechtwinklig ist, so folgt $HB = a\sqrt{3}$. Durch die von uns gelösten Aufgaben ist eine Reihe anderer alsbald zu erledigen. So können wir die Kante des Würfels bestimmen, wenn die Diagonale oder der Schnitt HAC oder HO gegeben ist.

Wir erkannten, daſs HD nicht nur auf AD und DC, sondern auch auf DB senkrecht steht. Die einfachste Anschauung zeigt uns, daſs HD auf allen Geraden senkrecht steht, welche der Ebene $ADCB$ angehören und durch D gehen. Diese Erkenntnis wird demnächst für uns den Inhalt eines hochbedeutsamen grundlegenden Lehrsatzes ausmachen. Für jetzt genügt dieser Hinweis.

Bei Betrachtung des Dreiecks HAC finden wir, daſs eine Ebene durch drei Punkte bestimmt ist. Dieser Ebene gehört auch der Punkt O und die Linie HO an. Sie schneidet die Ebene $EHDA$ in der Geraden AH.

* Diese Betrachtung läſst sich verallgemeinern. Denken wir uns drei Punkte H, A, C im Raume. Die Punkte A, C bestimmen die Gerade AC. Ziehen wir nun HA und lassen den Punkt A die Gerade AC durchwandern, so

---

* Beim ersten Vortrage zu übergehen.

„beschreibt" HA, als unbegrenzte Gerade gefafst, eine Ebene, welche durch die drei Punkte H, A, C völlig bestimmt ist. Ebenso zeigt man, dafs ein Punkt und eine nicht durch den Punkt gehende Gerade, dafs zwei sich in einem Punkte schneidende Geraden, dafs zwei parallele Linien eine Ebene im Raume bestimmen. Als notwendige Folgerung ergiebt sich hieraus, dafs zwei verschiedene Ebenen sich nur in einer geraden Linie schneiden können. Denn angenommen, die beiden Ebenen hätten aufser den Punkten A, B auch noch den nicht mit A, B in gerader Linie liegenden Punkt C gemein, dann würden durch die drei Punkte A, B, C zwei Ebenen gehen, während wir gesehen haben, dafs sich durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nur eine Ebene legen läfst. Haben zwei Ebenen die Punkte A und B gemein, so gehört beiden die gerade Linie AB an. Vgl. § 1.

4. Man bestimme die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedons.

Lösung. Sei (Fig. 2) $DA = a$, $DC = b$, $DH = c$ gegeben. Gesucht wird HB. Dann finden wir:

$$HA^2 = a^2 + c^2,\; HC^2 = b^2 + c^2,\; AC^2 = a^2 + b^2.$$

HO ist Mittellinie des Dreiecks HAC. Daher wird:

$$4\,HO^2 + AC^2 = 2\,HA^2 + 2\,HC^2,\; 4\,HO^2 = a^2 + b^2 + 4\,c^2.$$

Dividiert man durch 4 und bemerkt, dafs $4\,DO^2 = 4\,AO^2 = a^2 + b^2$ ist, so erkennt man, dafs das Dreieck HDO bei D rechtwinklig ist und folglich:

$$HB^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Beim rechtwinkligen Parallelepipedon steht (wie beim Würfel) HD senkrecht zu jeder Geraden, welche der Ebene ADC angehört und durch D läuft. Man sagt: HD (GC, FB, EA) steht senkrecht zur Ebene ADC.

5. Man bestimme den Inhalt des Dreiecks HAC.

Lösung durch blofse Rechnung nach der Formel:

$$16\,I^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2\,a^2b^2 + 2\,b^2c^2 + 2\,c^2a^2, \quad (2)$$

wo a, b, c die Seiten des Dreiecks bedeuten.

Die Oberfläche des Parallelepipedons ist

$$S = 2\,ab + 2\,bc + 2\,ac.$$

Die Winkel, welche die Diagonale (HB) mit drei in einem ihrer Endpunkte zusammenlaufenden Kanten bildet, findet man durch Anwendung der Kosinusfunktion.

6. Man zeichne, wenn a, b, c gegebene Strecken sind, die Figuren $HABG$ und $ADFG$. Man beweise, dafs die Diagonalen des Parallelepipedons AG, EC, HB, FD gleich grofs sind, sich gegenseitig halbieren und also in einem Punkte zusammentreffen, der von den acht Ecken gleichen Abstand hat.

§ 3. Der Rauminhalt des rechtwinkligen Parallelepipedons.

Als Mafseinheit des Raumes benutzen wir das Kubikmeter. Dies ist ein Würfel mit der Seite (Kante) 1 *m*. Das Kubikmeter enthält 1000 Kubikdecimeter; 1 *cbm* = 1000 *cbdm* und daher wiegt ein Kubikmeter reinen destillierten Wassers von der Temperatur 4^0 1000 *kg*.

Angenommen, das Parallelepipedon sei *a m* lang, *b m* breit, *c m* hoch. Dann zerfällt seine Grundfläche in ab Quadratmeter und kann daher mit ebensoviel Würfeln (Kubikmetern) bedeckt werden. Über diese erste Schicht decken wir eine zweite, dritte, vierte u. s. w., bis endlich, nachdem c Schichten von je ab Kubikmetern übereinandergepackt sind, der ganze Raum erfüllt ist. Der Rauminhalt des rechtwinkligen Parallelepipedons beträgt abc Kubikmeter.

Bis jetzt haben wir angenommen, a, b, c seien ganze Zahlen. Trifft diese Annahme nicht zu, so wird das Raummeter als Mafs unbrauchbar. Denn wenn wir in diesem Falle den fraglichen Raum mit Würfeln von 1 *m* Seitenlänge auszufüllen suchen, so erkennen wir, dafs dies nicht gelingt und gewisse Lücken bleiben. Ist z. B. $a = 7{,}2$ *m*, $b = 3{,}4$ *m* und $c = 6{,}7$ *m*, so bedecken $7 \cdot 3 = 21$ *qm* die Grundfläche nicht völlig und $21 \cdot 6 = 126$ *cbm* füllen den Raum nicht völlig aus. Sein Rauminhalt beträgt mehr als 126 *cbm*. Dieselbe Überlegung zeigt aber, dafs $8 \cdot 4 \cdot 7 = 224$ *cbm*, in ähnlicher Weise aufgeschichtet, einen Raum umschliefsen, welcher den fraglichen als einen Teil enthält. — Um nun zu einer genauen Wertangabe zu gelangen, wählen wir das Kubikdecimeter als Einheit und finden den Raum als $72 \cdot 34 \cdot 67$ *cbdm*. Die Ausrechnung ergiebt 164 016 *cbdm* oder 164,016 *cbm*. Durch Fortsetzung dieser Schlufsweise erkennen wir, dafs abc den Inhalt des rechtwinkligen Parallelepipedons darstellt, mögen nun a, b, c ganze oder gebrochene Zahlen sein.

Wären a, b, c sämtlich oder teilweise irrational, also durch einen Bruch nicht genau ausdrückbar, so genügt die Erinnerung, dafs man dem genauen Werte beliebig nahe kommen kann, und zwar durch Wertangabe in Form eines Decimalbruchs. Auch in diesem Falle giebt abc den Kubikinhalt des Parallelepipedons an.

§ 4. Die Pyramide.

Eine Pyramide (Spitzsäule) wird begrenzt von einem n Eck (Grundfläche) und n Dreiecken (Seitenflächen), welche eine

Spitze gemeinsam haben. Eine solche Pyramide heifst eine n-seitige. Eine dreiseitige Pyramide ist begrenzt von vier Dreiecken und daher in gewissem Sinne die einfachste stereometrische Figur.

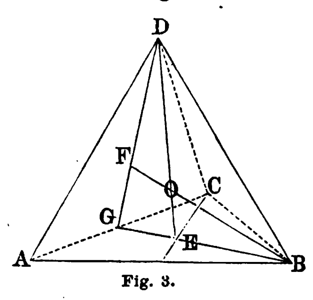


Fig. 3.

Man nennt dieselbe auch ein Tetraeder. Das Tetraeder hat vier Ecken, sechs Kanten und vier Seiten. Sind die Kanten sämtlich gleich, so sind die Seiten gleichseitige Dreiecke, wir haben das regelmäfsige Tetraeder vor uns (Fig. 3). Sind die drei in einer Ecke zusammenlaufenden Winkel alle rechte, wie im Tetraeder $ADCH$ (Fig. 2), so nennt man das Tetraeder ein rechtwinkliges. Sind bei einer Pyramide die Seitendreiecke alle gleichschenklig, d. h. sind die Seitenkanten unter sich gleich, so wollen wir die Pyramide gerade nennen.

Betrachten wir zunächst das regelmäfsige Tetraeder. Legt man die Seitendreiecke DAB, DBC, DAC nach aufsen hin um, bis sie nach Drehung um die Grundkanten AB, BC, AC in die Ebene des Dreiecks ABC gelangen, so entstehen bei A, B, C in der Ebene Winkel von $180^0 = 60^0 + 60^0 + 60^0$; mithin ist die erhaltene Gesamtfigur ein gleichseitiges Dreieck. Umgekehrt kann aus letzterem das Tetraeder hergestellt werden. Bei dieser Drehung beachten wir eine Thatsache von grofser allgemeiner Bedeutung. Wenn zwei Ebenen eine gewisse gerade Linie gemeinsam haben, so können wir die eine der beiden Ebenen festhalten und die andere um die gemeinsame gerade Linie so lange herumdrehen, bis sie mit der erstern zusammenfällt. Die Gröfse der Drehung heifst Flächenwinkel.

Aufgabe. F (Fig. 3) sei Schwerpunkt des Dreiecks ADC. Man bestimme BF.

Lösung. Wir fällen von B ein Lot auf die Mittellinie DG des Dreiecks DAC und behaupten, dafs der Fufspunkt F dieses Lotes der Schwerpunkt des Dreiecks ADC ist.

Sei $AD = DC = AC = a$, so ist $DG = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Ebenso ist $BG = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Nun sei $GF = x$, dann ist $DF = \frac{a}{2}\sqrt{3} - x$, daher:
$$BF^2 = \frac{3}{4}a^2 - x^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{3} - x\right)^2.$$
Die Ausrechnung ergiebt $x = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, also $GF = \frac{1}{3}GD$. Folglich

ist F der Schwerpunkt des Dreiecks ADC. Nun ergiebt sich $BF^2 = BG^2 - GF^2$, also $BF = \frac{a}{3}\sqrt{6}$. Durch Umkehrung des Pythagoreischen Satzes zeigt man, daſs $BF \perp FA$; auch ist Dreieck $BFD \cong BFA \cong BFC$. Ist a die Kante des Tetraeders, so ist die Oberfläche dieses Körpers $a^2\sqrt{3}$ und der Inhalt des Durchschnitts DGB ist $\frac{a^2}{4}\sqrt{2}$. Setzen wir $\angle DGB = \varepsilon$, so wird

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Der Punkt O ist von den Ecken des Tetraeders gleich weit entfernt. FE ist DB parallel, weil es die Seiten GD und GB in verhältnisgleiche Stücke teilt. $4\,OE = DE$. Auch in der Zeichnung ist $GD = 3\,GF$, $DE = 4\,OE$.

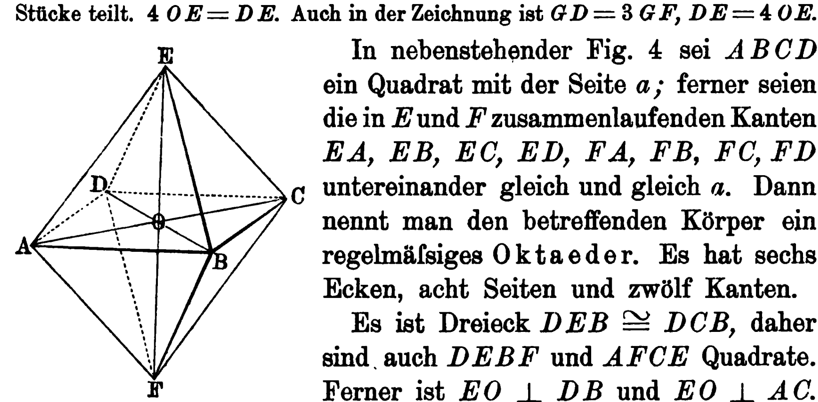


Fig. 4

In nebenstehender Fig. 4 sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seite a; ferner seien die in E und F zusammenlaufenden Kanten $EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC, FD$ untereinander gleich und gleich a. Dann nennt man den betreffenden Körper ein regelmäſsiges Oktaeder. Es hat sechs Ecken, acht Seiten und zwölf Kanten.

Es ist Dreieck $DEB \cong DCB$, daher sind auch $DEBF$ und $AFCE$ Quadrate. Ferner ist $EO \perp DB$ und $EO \perp AC$. EO steht senkrecht zur Ebene $DABC$. Wir müssen uns nunmehr dem betreffenden Lehrsatze zuwenden.

§ 5. Das Lot zur Ebene.

Wenn eine gerade Linie auf zwei Geraden in deren Schnittpunkte senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht zur Ebene der zwei Geraden.

Voraussetzung. $AO \perp BO$ (Fig. 5) und $AO \perp DO$; FO beliebig.

Behauptung. $AO \perp FO$.

Beweis. Es sei $BO = OC$, $DO = OE$, dann ist das Viereck $BDCE$ ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkte O; daher $FO = OG$ und $BF = CG$, wie aus der Kongruenz von Dreiecken folgt. Ebenso zeigt man durch Kongruenz, daſs $AB = AC$ und $AD = AE$ ist. Dann folgt durch Kongruenz der Dreiecke ABD und ACE, daſs die Winkel dieser Seitendreiecke bei B und C bezüglich übereinstimmen, also auch die Dreiecke ABF

und ACG kongruent, daher AF und AG gleich werden. Nunmehr ist $AOF \cong AOG$, daher

$$AO \perp FO.$$

Mithin steht AO senkrecht zu allen durch den Fufspunkt O gehenden, der Ebene $BDCE$ angehörenden Geraden. Man sagt:

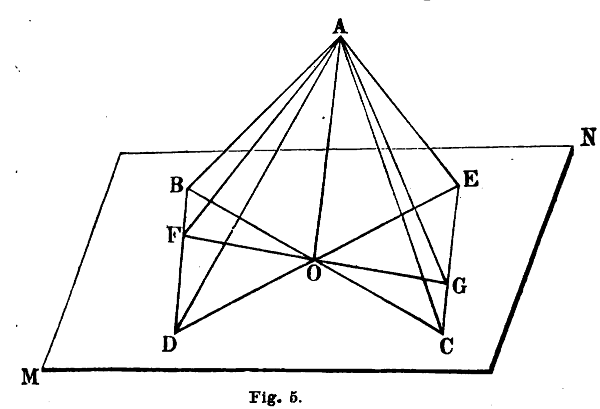


Fig. 5.

AO steht senkrecht zur Ebene $BDCE$.

Der Lernende fertige sich ein Gestell zur Veranschaulichung dieses Satzes selbst an. Als Grundebene nehme man ein leichtes Brettchen, als Ständer AO eine kräftige Nadel mit einem Öhr bei A, durch welches Nähfäden zu dem bei B, D, C, E fein durchlochten Brettchen gezogen werden.

Durch den vorhin bewiesenen Satz werden früher gewonnene Einzelkenntnisse für uns zusammengefafst. Dieselben sind aufzuzählen; dabei ist das Ganze kurz zu wiederholen.

AO ist kürzeste gerade Linie zwischen A und irgend einem Punkte der Ebene MN. Von A aus kann nur eine Senkrechte auf die Ebene gefällt werden. Denn wäre AO' eine zweite Senkrechte, so würden im Dreiecke AOO' zwei rechte Winkel bei O und bei O' sich ergeben.

In O kann zur Ebene MN nur eine Senkrechte errichtet werden. Denn wäre OA' eine zweite Senkrechte, so würde die durch OA und OA' gelegte Ebene MN in einer Geraden OL schneiden, und dann wäre $\sphericalangle AOL = A'OL$, ein Teil gleich dem Ganzen, was unmöglich ist.

Ist $BO \perp AO$, $DO \perp AO$ und $FO \perp AO$, so liegt FO in derselben Ebene mit BO und DO. Denn sonst würde eine durch AO und FO gelegte Ebene die Ebene MN in einer Geraden OL schneiden, und dann wäre wieder $\sphericalangle AOF = AOL$, ein Teil gleich dem Ganzen, w. u. i. Hiermit ist bewiesen:

Dreht man einen rechten Winkel AOB so herum, dafs der eine Schenkel AO festbleibt, so beschreibt der andere Schenkel eine Ebene. Anders ausgedrückt lautet dieser Satz:

Wenn mehr als zwei Gerade auf einer gewissen Geraden in einem Punkte derselben senkrecht stehen, so gehören alle erstgenannten derselben Ebene an.

1. Aufgabe. Gegeben $BO = a$, $DO = b$, $AO = c$, $BD = d$. Man finde durch Zeichnung und Rechnung den Abstand des Punktes A von der Mitte der Strecke BD (Fig. 5).

Lösung durch Zeichnung. Wir zeichnen aus den gegebenen Katheten die rechtwinkligen Dreiecke AOB und AOD, wodurch die Hypotenusen AB und AD bekannt werden. Dann ist das Dreieck BAD bestimmbar, in welchem wir von A aus die Mittellinie ziehen.

Lösung durch Rechnung. Da $AB^2 = c^2 + a^2$, $AD^2 = c^2 + b^2$, so ist für die gesuchte Strecke x nach einem Satze über die Mittellinien: $4x^2 + d^2 = 4c^2 + 2a^2 + 2b^2$.

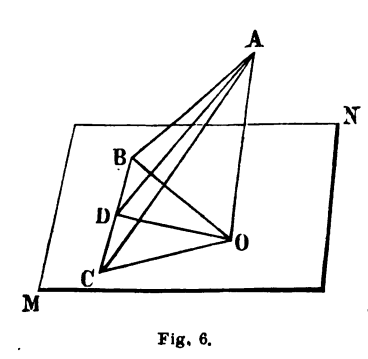


Fig. 6.

2. Aufgabe. Gegeben ein Punkt A aufserhalb einer Ebene MN. Man fälle vom Punkte A aus auf MN eine Senkrechte (Fig. 6).

Lösung. In der Ebene ziehen wir die beliebige Gerade BC, ziehen ferner $AD \perp BC$, dann in MN die Linie, welche zu BC in D senkrecht steht. Endlich fällen wir von A auf die letztgenannte Linie die Senkrechte AO. Dann löst AO die Aufgabe.

Beweis. Wir ziehen BO beliebig und behaupten, dafs auch $AO \perp BO$. Es ist

$$AB^2 = BD^2 + DA^2 = BD^2 + DO^2 + OA^2 = BO^2 + OA^2.$$

Folglich steht AO auf OD und OB, mithin auf der Ebene MN senkrecht.

Der Lernende fertige sich zur Veranschaulichung wieder ein Gestell an, wie oben angegeben wurde.

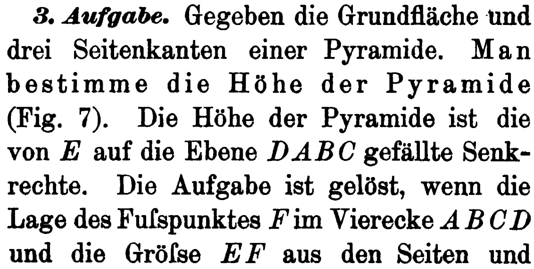


Fig. 7.

3. Aufgabe. Gegeben die Grundfläche und drei Seitenkanten einer Pyramide. Man bestimme die Höhe der Pyramide (Fig. 7). Die Höhe der Pyramide ist die von E auf die Ebene $DABC$ gefällte Senkrechte. Die Aufgabe ist gelöst, wenn die Lage des Fufspunktes F im Vierecke $ABCD$ und die Gröfse EF aus den Seiten und Winkeln des Vierecks $ABCD$ und den drei Kanten EA, EB, EC durch Zeichnung bestimmt sind.

Lösung. Über der Seite AB des gegebenen Vierecks zeichne man (nach aufsen hin) aus seinen drei bekannten Seiten das Dreieck EAB und fälle die Höhe von E auf AB. Dann ist diese Höhe nach der vorigen Aufgabe ein geometrischer Ort für den gesuchten Fufspunkt F. Ein zweiter geometrischer Ort ergiebt sich durch Betrachtung der Seite BC und des Dreiecks EBC. Ist die Lage des Punktes F bekannt, so ist das Stück AF, mithin im rechtwinkligen Dreieck EAF auch EF bestimmbar.

Die Aufgabe 3 ist bei der ersten Durchnahme zu übergehen.

§ 6. Pyramide und Prisma.

Ein Prisma (eine Säule) ist ein Körper, welcher von zwei parallel im Raume liegenden kongruenten n-Ecken als Grundflächen und von Parallelogrammen als Seitenflächen begrenzt wird. Die Seitenkanten sind folglich einander gleich. Wenn die Grundflächen Dreiecke, Vierecke u. s. w. sind, so nennt man das Prisma dreiseitig, vierseitig u. s. w. Das Parallelepipedon, der Würfel sind vierseitige Prismen. Da die Ebenen der beiden Grundflächen einander parallel sind, so haben sie überall gleichen Abstand. Dieser gleiche Abstand heifst Höhe des Prismas. Wenn die Seitenkanten auf den beiden parallelen Ebenen senkrecht stehen, so heifst das Prisma ein gerades, sonst ein schiefes.

Vorstehende Darstellung beruht auf folgenden Sätzen:

Zwei Ebenen, welche sich nicht schneiden, sind parallel.

Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Schneiden parallele Gerade zwei parallele Ebenen, so sind die auf den Geraden durch die Ebenen bestimmten Abschnitte gleich.

Winkel, deren Schenkel paarweise parallel und nach derselben Seite geöffnet im Raume liegen, sind gleich.

Wenn zwei Gerade derselben dritten im Raume liegenden Geraden parallel sind, so sind sie unter sich parallel.

Diese Sätze werden später bewiesen. Wir überzeugen uns am Prisma durch die Anschauung von ihrer Richtigkeit.

Ein gerades Prisma kann im allgemeinen nicht durch Eintragung von Würfeln genau ausgemessen werden. Dennoch können wir uns durch Eintragung kleiner Quadrate in die Grundfläche dem wahren Inhalte derselben beliebig nähern. Diese kleinen Quadrate nehmen wir nun zu Grundflächen von Würfeln und packen

darauf Schicht über Schicht, bis das ganze Prisma erfüllt ist. Beträgt der Inhalt der Grundfläche g, die Höhe h, so finden wir durch die oben angedeuteten Schlüsse den Inhalt des Prismas gegeben durch den Ausdruck gh.

Ein schiefes Prisma ist inhaltlich gleich einem geraden, welches dieselbe Grundfläche und Höhe hat.

Aus dem Gesagten ergiebt sich, dafs es auf die Form der Grundfläche (ob Dreieck, Viereck u. s. w.) gar nicht ankommt, sondern nur auf den Flächeninhalt. Man kann daher ein Prisma durch Schnitte (Ebenen) in n gleiche Prismen zerlegen, und zwar durch Schnitte, welche einer Seitenfläche parallel laufen u. s. w.

Man findet den Inhalt einer Pyramide mit der Grundfläche g und der Höhe h durch die Formel:

$$\varDelta = \frac{1}{3} gh \qquad (4)$$

An dieser Stelle beweisen wir dieselbe noch nicht, wollen sie aber bestätigen, wie folgt.

In dem nebenstehenden rechtwinkligen Parallelepipedon (Fig. 8) sei $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$. Die vier Diagonalen AG, FD, CE und HB halbieren sich gegenseitig (z. B. HB und CE als Diagonalen des Rechtecks $EHCB$), schneiden sich also in dem Punkte O. Hiernach zerfällt das Parallelepipedon in sechs vierseitige Pyramiden mit der gemeinsamen Spitze O. Eine derselben $(EHDAO)$ hat die Grundfläche bc. Die Höhe derselben ist $\frac{a}{2}$, nämlich die gemeinsame Mittellinie der Dreiecke EOD und HOA. Daher ist der Inhalt

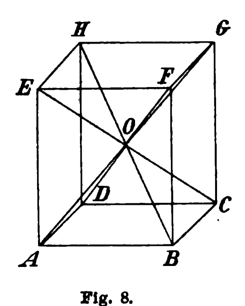


Fig. 8.

dieser Pyramide nach (4) gleich $\frac{abc}{6}$. Gleiches ergiebt sich für die übrigen Pyramiden; der Gesamtinhalt ist also abc, und damit haben wir eine Bestätigung der Formel (4). Eine andere Bewahrheitung derselben liefern ein hohles, mit Sand ausfüllbares Prisma und eine hohle Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe.

§ 7. Die runden Körper.

Wir werden in der Stereometrie nur drei runde Körper betrachten: den Cylinder (die Walze), den Kegel und die Kugel. Wenn ein Rechteck sich um eine seiner Seiten als Achse herumbewegt, so beschreibt die parallele Seite den Mantel eines Cylinders, während

die beiden andern Seiten in parallelen Ebenen zwei Kreisflächen überstreichen. Der von diesen beiden Kreisflächen und der Mantelfläche begrenzte Körper heifst ein gerader Cylinder. Die beiden Kreisflächen kann man Grundflächen des Cylinders nennen.

Wenn ein rechtwinkliges Dreieck sich um eine seiner Katheten als Achse herumdreht, so beschreibt die andere Kathete eine Kreisfläche, während die Hypotenuse den Mantel (Mantelfläche) eines geraden Kegels bildet. Die Kreisfläche heifst Grundfläche, der bei der Umdrehung festbleibende Punkt der Hypotenuse heifst Spitze des Kegels.

Wenn ein Halbkreis sich um den Durchmesser als Achse herumdreht, so beschreibt er eine Kugelfläche. Jeder Punkt der Kugel ist vom Mittelpunkt gleich weit entfernt.

Die Achse des Cylinders steht auf beiden Grundflächen senkrecht und heifst auch Höhe (h) des Cylinders. Schneidet man den Cylinder durch eine längs der Achse gelegte Ebene, so erhalten wir ein Rechteck, den Achsenschnitt. In diesem Rechtecke nennt man die Gröfse der der Achse parallelen, aus der Mantelfläche herausgeschnittenen Seiten auch die „Seite" des Cylinders. Rollt man den Cylindermantel durch Ausbreitung in einer Ebene ab, so entsteht ein Rechteck, dessen Grundlinie der Umfang des Grundkreises und dessen Höhe die Seite des Cylinders ist. Daher ist der Inhalt der Mantelfläche, wenn der Grundkreisradius r ist, gegeben durch den Ausdruck

$$M = 2rh\pi. \quad \ldots \quad (5)$$

Die Oberfläche des Cylinders beträgt hiernach

$$S = 2r^2\pi + 2rh\pi. \quad \ldots \quad (6)$$

Bedeckt man die Grundfläche $r^2\pi$ des Cylinders mit kleinen Würfeln, deren Zahl sich der Zahl $r^2\pi$ beliebig nähern läfst, und schichtet Lagen solcher Würfel übereinander, bis der ganze Cylinderraum angefüllt ist, so erkennt man, dafs der Rauminhalt (Volumen) des Cylinders durch die Formel gegeben wird

$$V = r^2h\pi. \quad \ldots \quad (7)$$

Die Achse des Kegels steht auf der Grundfläche senkrecht und heifst auch Höhe (h) des Kegels. Ein längs der Achse geführter Schnitt heifst Achsenschnitt. Er liefert ein gleichschenkliges Dreieck, dessen aus der Mantelfläche entspringende Linien den Namen „Seite" des Kegels (s) als Gröfsenbezeichnung führen. Heifst der Grundkreisradius r, so besteht die Gleichung

$$s^2 = r^2 + h^2. \quad \ldots \quad (8)$$

* Rollt man den Mantel des Kegels durch Ausbreitung in einer Ebene ab, so entsteht ein Kreissektor (Kreisausschnitt) mit dem Bogen $2r\pi$ und dem Radius s. Zerlegt man den ausgebreiteten Mantel in der Weise, wie es Fig. 9 zeigt, in kleine Dreiecke mit den Grundlinien α, β u. s. w., so kann man als gemeinsame Höhe derselben s ansehen und findet als Inhalt des Mantels

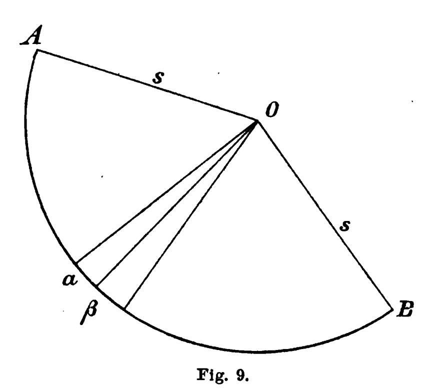


Fig. 9.

$$M = \frac{s}{2}(\alpha + \beta + \ldots.) = \frac{s}{2} \cdot 2r\pi.$$

Daher: $$M = rs\pi \quad . \quad . \quad (9)$$

Obige Betrachtung hätten wir auch am Kegel selbst ohne Ausbreitung des Mantels in einer Ebene vornehmen können.

Der Winkel AOB ist die Mantelöffnung ω. Ihre Gröfse findet man durch den Schlufs:

Der Mantelöffnung		360^0	entspricht der Bogen		$2s\pi$	m
„	„	$\frac{360^0}{2s\pi}$	„ „	„	1	„
„	„	$\frac{r}{s} \cdot 360^0$	„ „	„	$2r\pi$	„

Daher: $$\omega = \frac{r}{s} \cdot 360^0 \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Die Oberfläche des Kegels S bestimmt sich als

$$S = r^2\pi + rs\pi. \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Der Inhalt des Kegels V wird bestimmt durch die Gleichung:

$$V = \frac{1}{3} r^2\pi h. \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Diese Bestimmung kann man sofort auf diejenige des Pyramideninhalts zurückführen.

Über den abgestumpften Kegel bemerken wir folgendes: Er entsteht durch Umdrehung eines rechtwinkligen Paralleltrapezes um die auf den parallelen Seiten senkrechte Seite als Achse oder durch einen parallel der Grundfläche geführten Schnitt. Begrenzt wird er von zwei Kreisflächen (mit den Radien r und ρ) und einer Mantelfläche mit der Seite s. Der Abstand der beiden parallelen Kreisflächen h heifst Höhe des abgestumpften Kegels. Man erhält, wenn wieder M den Mantel, S die Oberfläche und V den Körperinhalt bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} M &= (r + \rho)s\pi;\; s^2 = h^2 + (r - \rho)^2; \\ S &= r^2\pi + \rho^2\pi + (r + \rho)s\pi; \\ V &= \frac{h}{3}(r^2 + r\rho + \rho^2)\pi. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

* Beim ersten Vortrage zu übergehen.

Über die Kugel stellen wir folgende Formeln zusammen: Ihre Oberfläche für den Radius r beträgt

$$S = 4 r^2 \pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die Gesamtoberfläche der Halbkugel ist also $3 r^2 \pi$, die krumme (sphärische) Oberfläche der Halbkugel $2 r^2 \pi$, der Flächeninhalt des gröfsten Kreises $r^2 \pi$.

Schneidet man eine Kugeloberfläche durch eine Ebene, so ist die Schnittlinie ein Kreis. Zwei parallele Ebenen schneiden die Kugel in Parallelkreisen. Das zwischen zwei Parallelkreisen liegende Stück der Kugeloberfläche heifst eine Kugelzone. Der gegenseitige Abstand der schneidenden Ebene heifst Höhe der Zone. Die Zone von der Höhe h hat den Flächeninhalt

$$F = 2 r \pi h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Dieselbe Formel gilt für die Kugelkappe, wenn man die eine der schneidenden Ebenen zur Berührungsebene werden läfst.

Der Rauminhalt der Kugel ist

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Der Rauminhalt einer Kugelkappe ist

$$V = r^2 h \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Diese Formel kann bei der zweiten Durchnahme mit Hilfe des Cavalierischen Hauptsatzes bewiesen werden: Zwei Körper sind gleich, wenn in gleicher Höhe bei beiden geführte Schnitte stets gleiche Flächen ergeben. Vgl. auch den Inhalt des schiefen Prismas S. 11.

§ 8. Zusammenstellung einiger Aufgaben.

a. Cylinder. 1. $r = 34{,}259$ *cm*, $h = 180{,}23$ *cm*, $S = 461\,079$ *qcm*, $V = 662\,710$ *cbcm*.

2. Dasselbe Zahlenbeispiel, wenn $V : S$, r gegeben; gesucht h.

3. „ „ „ $V : S$, h „ „ r.

4. Ein cylindrisches Gefäfs hat den Grundkreisdurchmesser $2 r = 17$ *dm*, die Höhe $h = 7$ *dm*. Wieviel wiegt die Wassermenge, welche es fafst? — 1588,9 *kg*.

5. Ein a *m* tiefer Brunnen soll so ausgemauert werden, dafs er die lichte Weite (innerer Durchmesser) d und die Wandstärke c erhält. Wieviel Kubikmeter Steine sind erforderlich? $a = 17$, $d = 2$, $c = 0{,}62$. Antwort: 87 *cbm* (86,754).

6. Sind V und S gegeben, so erhält man für die Bestimmung des Grundkreisradius y die Gleichung: $2 V = y S - 2 y^3 \pi$, welche

man durch Probieren näherungsweise lösen kann. Für $V = 48\pi$, $S = 56\pi$ findet man $y_1 = 2$, $y_2 = 4$, $y_3 = -6$. Der letzte Wert ist nicht brauchbar.

b. Kegel. 1. Man berechne Mantel, Oberfläche und Inhalt eines Kegels, für den $r = 3$ *cm*, $h = 4$ *cm* ist. Durch Kopfrechnen zu lösen. $\pi = 3$ oder $\frac{22}{7}$.

2. Dieselbe Aufgabe für $r = 5$, $h = 12$.

3. Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $s = a$. Man berechne Oberfläche und Inhalt.

4. Ein Kegel mit der Höhe $h = 19$ und der Seite $s = 24$ *cm* besteht aus Gufseisen (spec. Gewicht $S = 7{,}5$). Wie schwer ist er?

5. Ein Bottich hat die Gestalt eines abgestumpften Kegels; der obere innere Durchmesser beträgt 176 *cm*, der untere 112 *cm*, die Höhe 74 cm. Wieviel Wasser fafst er?

6. Ein Kegel von der Höhe $h = 17$ *cm* und mit dem Grundkreisradius $r = 12$ *cm* hat mit einem Cylinder, dessen Achsenschnitt ein Quadrat ist, gleichen Inhalt. Welcher von den beiden Körpern hat die gröfsere Oberfläche?

c. Kugel. 1. Man berechne Inhalt und Oberfläche einer Kugel, deren Radius $r = 3$ *cm* beträgt. Durch Kopfrechnung, wie oben.

2. Zwei Kugeln mit den Radien $r = 17{,}5$ und $\rho = 13{,}4$ sollen geschmolzen und in eine Kugel umgegossen werden. Wie grofs ist der Radius x dieser Kugel?

3. Ein Cylinder mit den Bestimmungen $r = 12$ *cm*, $h = 19$ *cm* hat mit einer Kugel gleichen Inhalt. Wie verhalten sich die Oberflächen beider Körper?

4. Der Durchmesser einer Kugel hat die Gröfse $d = 24$ cm und ist in sechs gleiche Teile geteilt. Durch jeden Teilpunkt ist eine Ebene senkrecht zum Durchmesser gelegt. Wie verhalten sich die Inhalte der zwischen den einzelnen Ebenen enthaltenen Kugelscheiben?

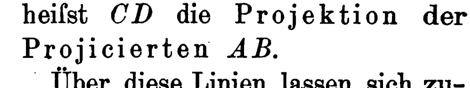
5. Wie bestimmt man die Oberflächen der Erdzonen, wenn die Erde als Kugel aufgefafst wird?

6. Der Durchmesser der Sonne ist 108,61mal so grofs als derjenige der Erde. Wievielmal ist der Sonnenball gröfser als die Erde? — Dieselbe Aufgabe für den Jupiter, den Saturn, die Venus und den Mond. Die betreffenden Verhältniszahlen sind für dieselben: 11, 3; 9,2; 0,94; 0,2729.

Zweiter Lehrgang.

§ 9. Projektion und Projicierte.

Fällt man von den beiden Endpunkten A und B einer Strecke auf eine Ebene MN (Fig. 10) die Senkrechten AC und BD, so



heifst CD die Projektion der Projicierten AB.

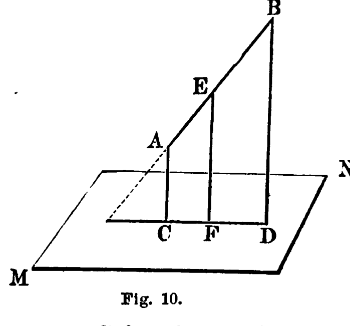
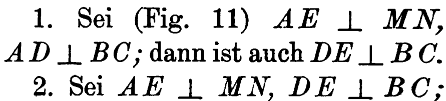


Fig. 10.

Über diese Linien lassen sich zunächst drei Sätze aussprechen, von denen uns der eine bereits § 5, Aufgabe 2, bekannt geworden ist.



1. Sei (Fig. 11) $AE \perp MN$, $AD \perp BC$; dann ist auch $DE \perp BC$.

2. Sei $AE \perp MN$, $DE \perp BC$; dann ist auch $AD \perp BC$.

3. Sei $AD \perp BC$, $DE \perp BC$, $AE \perp DE$; dann ist auch $AE \perp MN$.

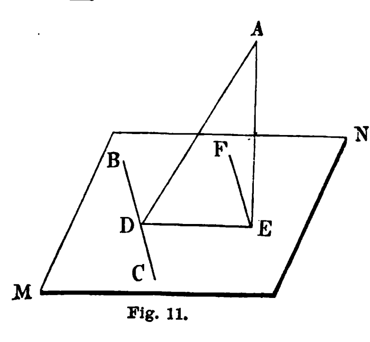


Fig. 11.

$\sphericalangle ADE$ heifst Neigungswinkel der Schiefen AD zur Ebene MN.

Die Beweise gelingen sowohl durch Kongruenz von Dreiecken, indem man $BD = DC$ macht und B, C mit E verbindet, als auch besonders einfach durch Rechnung.

Zu 1. $AB^2 = BD^2 + DA^2 = BD^2 + DE^2 + AE^2$; anderseits $AB^2 = BE^2 + AE^2$;

daher: $$BD^2 + DE^2 = BE^2,$$
also: $$BD \perp DE.$$

Zu 2. $AB^2 = BE^2 + AE^2 = BD^2 + DE^2 + AE^2$
$= BD^2 + AD^2$; also: $AB^2 = BD^2 + AD^2$,

folglich: $$BD \perp AD.$$

Zu 3. ist der Beweis bereits früher geliefert. Wörtlich heifsen die drei Sätze:

Erster Satz über Projektion und Projicierte: Fällt man von einem aufserhalb einer Ebene liegenden Punkte eine

Senkrechte auf die Ebene und auf eine in der Ebene liegende Gerade, so ist die Verbindungslinie der beiden Fuſspunkte senkrecht zu der in der Ebene liegenden Geraden.

Zweiter Satz. Steht eine in einer Ebene liegende Gerade zur Projektion einer schiefen Linie auf die Ebene der Geraden senkrecht, so steht sie auch senkrecht zu der projicierten Linie.

Dritter Satz. Fällt man von einem Punkte auſserhalb einer Ebene auf eine in einer Ebene liegende Gerade ein Lot, errichtet dann im Fuſspunkte des Lotes eine der Ebene angehörige Senkrechte zu der in der Ebene liegenden Geraden und fällt dann von dem auſserhalb der Ebene liegenden Punkte auf die letztere Senkrechte ein Lot, so ist dieses Lot senkrecht zur Ebene.

Aufgabe. Gegeben $AE = a$, $DE = b$, $BD = c$. Man bestimme durch Zeichnung und Rechnung die drei Winkel $\alpha = ABE$, $\beta = EBD$, $\gamma = ABD$ (Fig. 11).

Lösung durch Zeichnung. Man zeichne zuerst das Dreieck AED, dessen beide Katheten man kennt. Hierdurch gewinnt man die Seite AD. Dann zeichne man BDE, dessen beide Katheten gegeben sind. Hierdurch gewinnt man BE. Nun sind die beiden Dreiecke ABE und ABD aus ihren Katheten bestimmbar.

Lösung durch Rechnung.

$$\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha\,\cos\beta. \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Läſst man den Punkt E sich auf DE fortbewegen, so läuft A auf der Geraden DA. Hierbei vergröſsern sich die Winkel β und γ. Wird $\beta = 90^0$, so zeigt (18), daſs γ gleichzeitig denselben Wert erhält. Wird also $BE \parallel DE$, so wird auch $BA \parallel DA$.

§ 10. Der Parallelismus. Flächenwinkel.

Auch für den Raum gilt der Grundsatz:

1. Durch einen gegebenen Punkt kann zu einer gegebenen Geraden nur eine einzige parallele Linie gezogen werden.

Zwei parallele Geraden bestimmen daher eine Ebene.

2. **Wenn zwei Ebenen keinen Punkt miteinander gemeinsam haben, so sind sie parallel** (s. unten 13). **Wenn eine Gerade zu zwei verschiedenen Ebenen senkrecht steht, so sind die Ebenen parallel.** Denn hätten die Ebenen einen Punkt gemeinsam, so könnte man diesen Punkt mit den Fufspunkten der Senkrechten verbinden und erhielte so ein Dreieck, dessen Winkelsumme gröfser als 180^0 wäre.

3. Wenn man in einer Ebene eine willkürliche Gerade zieht, so zerfällt die Ebene in zwei **Halbebenen**. Dreht man die eine dieser Halbebenen um die Schnittlinie als Achse herum, während die andere Halbebene fest bleibt, so entsteht der **Flächenwinkel**. Derselbe kann flach, stumpf, recht, spitz sein. Er kann mit jedem andern Flächenwinkel in Gröfsenvergleichung treten. Errichtet man in einem Punkte der Schnittgeraden zwei Senkrechte, welche in je einer der beiden Halbebenen liegen, so bilden diese Senkrechten den **Neigungswinkel** der Halbebenen. **Haben zwei Paare von Halbebenen gleiche Neigungswinkel, so haben sie auch gleiche Flächenwinkel.** Denn bringt man die gleichen Neigungswinkel zur Deckung, so mufs die Schnittgerade als auf den Schenkeln der Neigungswinkel senkrecht stehend für beide Flächenwinkel zusammenfallen.

4. Es fragt sich nun noch, ob der Neigungswinkel an allen Stellen der Schnittgeraden dieselbe Gröfse hat. Die Anschauung entscheidet die Frage sofort in bejahendem Sinne. Denn verschiebt man die Ebenen des Flächenwinkels längs der Schnittgeraden, so verschiebt sich gleichzeitig der Neigungswinkel, ohne seine Gröfse zu ändern. Siehe Fig. 12.

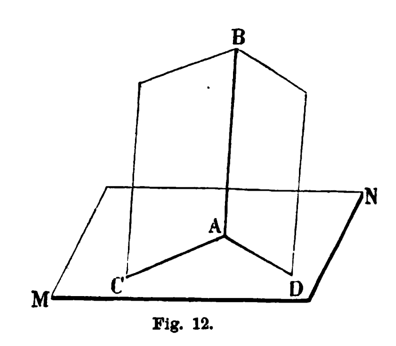


Fig. 12.

Indes kann man diese wichtige Eigenschaft auch systematisch beweisen. Wir werden die hierzu erforderlichen Schritte weiter unten angeben.

Ist der Neigungswinkel der m^{te} Teil eines andern, so ist der zugehörende Flächenwinkel ebenfalls der m^{te} Teil des zweiten. Dies ergiebt sich durch Ineinanderlegen der beiden Gebilde wie vorhin. Hieraus folgt:

5. **Der Neigungswinkel kann als Mafs des Flächenwinkels angesehen werden.**

6. * Ist eine Halbebene aus der Lage, in welcher sie mit der andern Halbebene einen flachen Winkel bildet, so weit gedreht, dafs ihr Neigungswinkel ein rechter ist, so sagen wir: die beiden Halbebenen sind senkrecht zu einander. In einer Geraden einer Ebene kann man daher nur eine senkrecht zur Ebene stehende Ebene errichten. Stehen zwei Ebenen zu einander senkrecht, so fällt ein zu der einen in einem Punkte der Schnittgeraden errichtetes Lot in die andere, ein von einem Punkte der einen auf die Schnittgerade herabgelassenes Lot steht senkrecht zur andern. Jede längs einer zu einer Ebene senkrechten Linie gelegte Ebene steht senkrecht zur erstern, weil ihr Neigungswinkel ein rechter ist. Umgekehrt ist die Schnittlinie zweier zu einer dritten senkrecht stehenden Ebenen senkrecht zur dritten Ebene; denn das im Fufspunkte der Schnittlinie zur dritten Ebene errichtete Lot gehört beiden Ebenen an.

7. Stehen zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

Man ziehe die Verbindungslinie ihrer Fufspunkte und errichte längs derselben zur gegebenen eine senkrechte Ebene. Dann gehören beide Senkrechte dieser Ebene an und sind nunmehr parallel, weil sie zu einer Geraden senkrecht stehen.

8. Um nachzuweisen, dafs zwei Gerade parallel sind, genügt im Raume nicht die Feststellung, dafs dieselben sich nicht schneiden. Vielmehr sind zwei Linien im Raume im allgemeinen weder parallel, noch schneiden sich dieselben; sondern sie sind windschief.

9. Steht von zwei parallelen Geraden die eine zu einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere zu derselben Ebene senkrecht. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man von einem beliebigen Punkte der zweiten Parallelen auf die Ebene eine Senkrechte herablassen, welche nach dem vorigen Satze zu der ersten Parallelen parallel wäre. Dann würde es also — gegen unsern Grundsatz — möglich sein, zu einer Geraden durch jenen willkürlichen Punkt zwei Parallele zu ziehen.

10. Wenn zwei Gerade derselben dritten parallel sind, so sind sie unter sich parallel. Denn legt man durch die dritte Gerade eine senkrechte Ebene, so müssen die beiden andern nach dem letzten Satze auch senkrecht sein zu dieser Ebene und sind daher nach dem vorletzten Satze einander parallel.

---

* Diese Sätze sind unter Benutzung eines zur Veranschaulichung dienenden Hülfsmittels, etwa eines hölzernen Würfels, und möglichst kurz zu behandeln.

11. **Wenn die Schenkel zweier Winkel im Raume paarweise parallel sind, so sind die Winkel gleich oder ergänzen sich zu 180°.**

Fig. 13.

Sei (Fig. 13) $DE \parallel AB$; $EF \parallel BC$. Man mache $DE = AB$, $EF = BC$; dann sind die Vierecke $ABED$ und $CBEF$ Parallelogramme, daher $BE \# DA$, $BE \# FC$; mithin ist $DA \# FC$, also $ADFC$ ein Parallelogramm, $AC = DF$ und Dreieck $ABC \cong DEF$, woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

Denkt man sich in Fig. 11 im Punkte D eine Senkrechte zur Ebene MN errichtet, so gehört diese Senkrechte DX derselben Ebene wie DA und DE an, weil diese drei Linien auf BD senkrecht stehen. Hieraus folgt, dafs $DX \parallel AE$ ist. Hieraus ergiebt sich ein zweiter, nicht so anschaulicher, aber mehr systematischer Beweis für den unter 7. mitgeteilten Satz. Schlägt man diesen Weg ein, so braucht man unter 4. sich nicht an die Anschauung zu wenden, sondern erhält die Gleichheit des Neigungswinkels an jeder Stelle der Schnittgeraden als besondern Fall des unter 11. bewiesenen Satzes. Bei der ersten Durchnahme verdient das anschaulichere Verfahren den Vorzug.

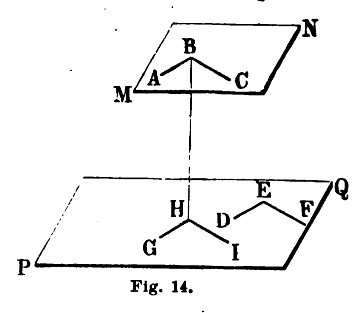


Fig. 14.

12. **Winkel mit parallelen Schenkeln liegen in parallelen Ebenen.**

Ist $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ (Fig. 14), so fälle man $BH \perp PQ$ und ziehe $GH \parallel DE$, $HI \parallel EF$. Dann ist nach 10. $AB \parallel GH$, $BC \parallel HI$, daher BH senkrecht sowohl zu AB wie zu BC, mithin nach 2. $PQ \parallel MN$.

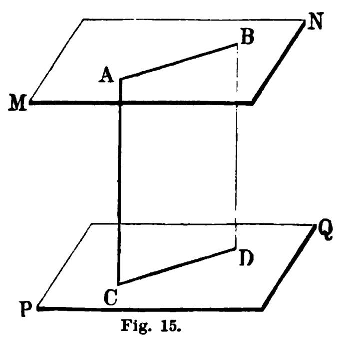


Fig. 15.

13. Werden die parallelen Ebenen MN und PQ (Fig. 15) durch eine dritte geschnitten, so sind die Durchschnitte AB und CD einander parallel. Denn hätten AB und CD einen Schnittpunkt, so würde derselbe beiden Ebenen MN und PQ angehören müssen, was gegen die Voraussetzung ist: $MN \parallel PQ$.

14. **Werden zwei parallele Ebenen von einer Geraden geschnitten, so bildet sie mit den Ebenen gleiche Neigungswinkel.** Denn fällt

man $AC \perp MN$ (Fig. 16), so ist auch $AC \perp PQ$, weil jede längs AC gelegte Ebene beide Ebenen in parallelen, also zu AC senkrechten Linien schneidet. Insbesondere ist $BC \parallel DE$ und damit der Satz bewiesen. Errichtet man in D die der Ebene PQ angehörende Senkrechte DX, so zeigt die Betrachtung der Ebene ADX, dafs eine Ebene zwei parallele Ebenen unter gleichen Neigungswinkeln schneidet.

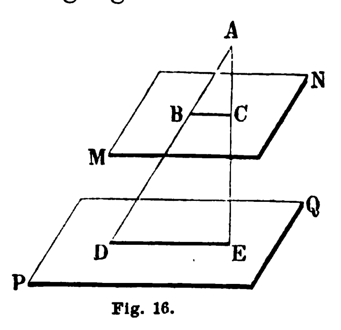


Fig. 16.

15. Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn sie einer einzigen in der Ebene liegenden Geraden parallel ist. Denn legt man (Fig. 17) durch die beiden Geraden eine Ebene, so ergiebt sich alsbald, dafs die aufserhalb der Ebene MN liegende Gerade AB diese Ebene in einem Punkte der Geraden CD treffen müfste.

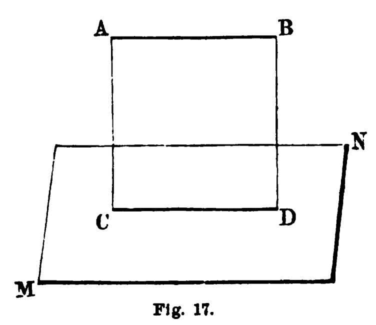


Fig. 17.

Sind AB und DE (Fig. 18) zwei windschiefe Geraden, und zieht man die übrigens willkürliche $AC \parallel DE$, so ist DE der Ebene ABC parallel. Fällen wir nun von D aus auf ABC die Senkrechte DF, so ist die Ebene $DFGE \perp ABC$. Ziehen wir nun $HJ \parallel DF$, so steht HJ senkrecht zur Ebene ABC (9), daher $HJ \perp AB$. Anderseits ist das Viereck $FHDJ$ ein Rechteck, und darum ist auch $HJ \perp DE$. Also:

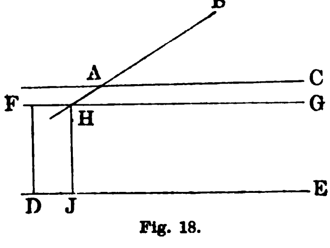


Fig. 18.

16. Sind zwei windschiefe Geraden gegeben, so kann man immer eine einzige Linie angeben, welche auf beiden senkrecht steht. Die gegenseitige Entfernung der Schnittpunkte dieser Senkrechten mit den beiden Windschiefen heifst der Abstand der Windschiefen. Der Winkel BAC (oder sein Ergänzungswinkel), also der Winkel, den eine zu einer Windschiefen parallele Gerade in ihrem Schnittpunkte mit der andern Windschiefen bildet, heifst der Winkel der beiden Windschiefen.

Man löse folgende Aufgaben durch Zeichnung bezw. Rechnung.

1. Gegeben drei Kugeln. Man zeichne eine Ebene, welche die drei Kugeln berührt. (Siehe unten § 14, Lehrsatz 2, der hier bewiesen werden kann.)

2. Man bestimme bei einer durch ihre sechs Kanten gegebenen dreiseitigen Pyramide den Abstand und den Winkel je zweier Gegenkanten.

3. Man bestimme durch Zeichnung den Radius der einem solchen Tetraeder umbeschriebenen Kugel.

4. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunkts einer Kugel, welche zwei gegebene Ebenen berührt? Man bestimme die einem Tetraeder einbeschriebene Kugel.

5. Um ein Tetraeder $ABCD$ ist eine Kugel beschrieben. Man zeichne in der Ebene ABC den Schnitt der in D an die Kugel gelegten Tangentialebene.

Bezüglich der Lösungen vgl. des Verfassers „100 Aufgaben".

6. Auf der Ebene eines gegebenen Dreiecks ABC sind in den Eckpunkten drei Senkrechte von gegebener Länge $AD = m, BE = n, CF = p$ errichtet. Man zeichne in der Ebene ABC den Durchschnitt der Ebene DEF und den Neigungswinkel der beiden Ebenen.

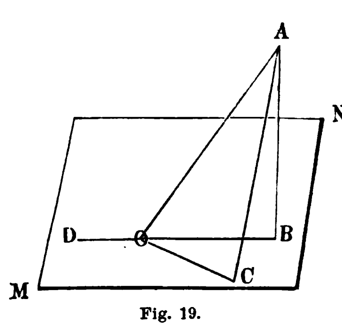


Fig. 19.

7. Der Neigungswinkel der Geraden AO (Fig. 19) zur Ebene MN sei gegeben, $\sphericalangle AOB = \alpha$; ebenso sei der Winkel $\sphericalangle BOC = \beta$ bekannt, den die in der Ebene liegende Gerade OC mit der Projektion OB bildet. Man bestimme $AOC = \gamma$. [Lösung Gl. (18).]

8. Man zeige, dafs $\gamma > \alpha$. Anleitung: $OB = OC$ (Fig. 19).

9. Man zeige, dafs bei einem regelmäfsigen Tetraeder der Abstand zweier Gegenkanten gefunden wird, wenn man die Mitten der beiden Gegenkanten verbindet.

10. Über einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a als Grundfläche steht eine Pyramide mit den gleichen Seitenkanten b. Man bestimme durch Zeichnung und Rechnung die Höhe der Pyramide, den Abstand ihrer Gegenkanten, die Neigungswinkel der Seitenflächen und den Radius der ein- und umbeschriebenen Kugel. (Gerade dreiseitige Pyramide.)

11. Jeder durch die in der vorigen Aufgabe behandelte Pyramide längs einer Grundkante geführte Schnitt ist ein gleich-

schenkliges Dreieck. Welches von diesen Dreiecken hat den kleinsten Inhalt?

12. Über einem Quadrate mit der Seite a stehe eine vierseitige gerade Pyramide mit den gleichen Seitenkanten b. Kann man in und um dieselbe Kugeln beschreiben? Wie grofs sind die Flächenwinkel an den Grund- und Seitenkanten? Wie grofs ist die Höhe der Pyramide? Wie grofs ist die Entfernung einer Grundkante von der parallelen Seitenfläche? Man zeichne denjenigen Schnitt, welcher durch eine Ebene bestimmt wird, die eine Grundkante enthält und zur parallelen Seitenfläche senkrecht steht. Man berechne den Inhalt dieses Schnittes.

13. Man zeige, dafs Parallele zwischen parallelen Ebenen gleich sind.

§ 11. Die dreiseitige Ecke. Kosinussatz.

Zwei Ebenen schneiden sich im allgemeinen in einer geraden Linie. Diese gerade Linie schneidet eine beliebige Ebene im allgemeinen in einem Punkte. Folglich haben drei Ebenen im allgemeinen einen Punkt gemeinsam und bilden in ihrem Durchschnitte eine d r e i s e i t i g e E c k e. An derselben unterscheiden wir drei K a n t e n, drei S e i t e n und drei W i n k e l. Die Kanten sind die Schnittlinien der drei Ebenen, die Seiten die von den Kanten gebildeten ebenen Winkel, und die Winkel die von den Ebenen gebildeten Neigungswinkel. Die Berechtigung dieser Benennungsart wird uns weiter unten klar werden.

Lehrsatz. In jeder dreiseitigen Ecke ist die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte.

Beweis. Es sei $\measuredangle\, BAC$ (Fig. 20) die gröfste der drei Seiten. Dann schneiden wir die Stücke AB und AD willkürlich auf den Kanten ab, ziehen BD und drehen das entstandene Dreieck um AB als Achse herum, bis es als AEB in die Ebene der dritten gröfsten Seite gelangt, verlängern BE bis zum Durchschnitt mit der dritten Kante und ziehen DC. Dann ist zu zeigen, dafs $\measuredangle\, EAC < DAC$ ist. Da $DC > EC$,

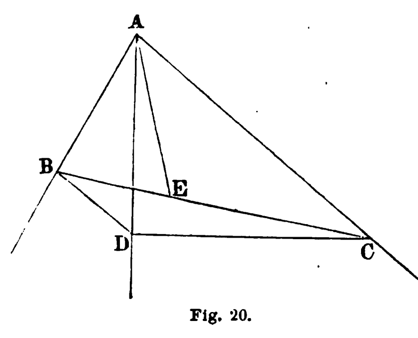


Fig. 20.

weil nämlich $BE = BD$ und $BD + DC > BE + EC$ ist, so haben die Dreiecke EAC und DAC zwei übereinstimmende Seiten,

während die dritten Seiten ungleich sind. Folglich sind die den ungleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel in entsprechender Beziehung ungleich, und damit ist der Satz bewiesen.

Man kann durch zweckmäſsige Wahl der willkürlichen Strecken AB und AD immer bewirken, daſs die Verlängerung von BE die Kante AC trifft.

Der im Beweise benutzte planimetrische Lehrsatz wird am besten an die Betrachtung eines Kreises in Verbindung mit einem auſserhalb des Kreises liegenden Punkte angeschlossen. Verbindet man den Punkt mit dem Mittelpunkte des Kreises, so erhält man auf der Verbindungslinie den dem Punkte nächsten und fernsten Kreispunkt. Läſst man den nächsten Punkt des Kreises die Peripherie bis zum fernsten hin durchlaufen, so nimmt der zugehörende Centriwinkel alle Werte von 0° bis 180° stets wachsend an, und ebenso wächst die Entfernung des bewegten Kreispunktes von dem auſserhalb des Kreises liegenden Punkte unausgesetzt. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, sind aber die eingeschlossenen Winkel ungleich, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar liegt der gröſsern Seite der gröſsere Winkel gegenüber. Die Umkehrung dieses Satzes kam oben zur Verwendung.

Verlängert man eine Kante, etwa BA, über A hinaus, so entsteht eine neue Ecke mit den Seiten

$$B'AD = 180^{\circ} - BAD,\ B'AC = 180^{\circ} - BAC,\ DAC.$$

Diese Ecke kann man die Nebenecke nennen. Wendet man den vorhin bewiesenen Satz auf die Nebenecke an, so folgt:

$$360^{\circ} - BAD - BAC > DAC,$$

oder:

$$\measuredangle\, BAD + BAC + DAC < 360^{\circ}.$$

Die Summe der Seiten einer dreiseitigen Ecke ist immer kleiner als 360°.

Dieser Satz läſst sich für jede konvexe Ecke beweisen. Man kann eine solche Ecke durch eine Ebene immer so schneiden, daſs ein geschlossenes Polygon, hier $BCDEF$ (Fig. 21), entsteht. Nehmen wir im Innern desselben einen Punkt O an und verbinden ihn mit den Ecken des Polygons, so entstehen ebensoviele Dreiecke, deren Spitzen in O liegen, wie solche, deren Spitzen in A liegen. Je zwei solcher Dreiecke haben eine gemeinsame Grundlinie, z. B. die Dreiecke ODE und ADE. Betrachten wir nun die beiden Nachbardreiecke ODC und ODE, so

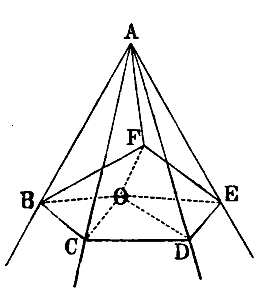


Fig. 21.

sind die beiden Winkel ODC und ODE nach dem vorigen Satze zusammen kleiner als die Winkel der entsprechenden Seitendreiecke ADC und ADE. Da nun die Summe der Dreieckswinkel in beiden

Fällen die gleiche ist, gleichgültig, ob ihre Spitzen in A oder in O liegen, nämlich 180 n für eine n-seitige Ecke, so mufs die Summe der Dreieckswinkel bei A kleiner sein als die Summe der Dreieckswinkel bei O, d. h. **für jede konvexe n-seitige Ecke ist die Summe der Seiten kleiner als 360°.**

Aufgabe. Gegeben die drei Seiten einer körperlichen Ecke. Man bestimme die Winkel durch Zeichnung und Rechnung.

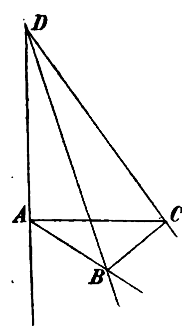


Fig. 22.

Lösung. Um den Flächenwinkel an der Kante DA (Fig. 22) zu bestimmen, greifen wir den beliebigen Punkt A heraus und errichten zu DA in jeder der Ebenen, welche den Flächenwinkel bilden, eine Senkrechte AB und AC. Dann ist $\sphericalangle BAC$ der Neigungswinkel der beiden Ebenen, bestimmt also den Flächenwinkel als dessen Mafs.

Sind die drei Seiten $\sphericalangle BDC = \alpha$, $BDA = \gamma$, $CDA = \beta$ gegeben, so nehme man DA willkürlich an und zeichne nun der Reihe nach in einer Ebene die Dreiecke DAB, DAC, BDC (zwei Seiten und eingeschlossener Winkel bekannt), endlich BAC (die drei Seiten bekannt). Dann ist $\sphericalangle BAC$ der gesuchte.

Für die Rechnung ergiebt sich:

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos x = BD^2 + DC^2 - 2BD \cdot DC \cdot \cos \alpha.$$

Mithin nach Subtraktion von BA^2, AC^2, wobei wird:

$$DA^2 = BD^2 - BA^2 = DC^2 - AC^2,$$

und nach Division durch -2:

$$AB \cdot AC \cdot \cos x = - AD^2 + BD \cdot DC \cdot \cos \alpha.$$

Dividiert man nun durch $BD \cdot DC$ und bemerkt, dafs

$$\frac{AD}{BD} = \cos \gamma, \quad \frac{AD}{DC} = \cos \beta, \quad \frac{AB}{BD} = \sin \gamma, \quad \frac{AC}{DC} = \sin \beta \text{ ist,}$$

so wird endlich:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos x.$$

Endlich ist klar, dafs der Neigungswinkel x mit A bezeichnet werden mufs, wenn die geometrische Zugehörigkeit der Seiten zu den Winkeln der Ecke ausgedrückt werden soll. $\sphericalangle A$ wird dann von den Ebenen der Seiten β und γ „gebildet“, und die Seite α „liegt ihm gegenüber“. Mithin:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A, \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19\,a)$$

Diese Formeln bleiben bei cyklischer Vertauschung der Gröſsen α, β, γ (Seiten) und A, B, C (Winkel der Ecke) richtig. Man nennt jede den Kosinussatz der Ecke.

Da $\cos A < 1$, so folgt $\cos\alpha > \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$, also:

$$\alpha < \beta + \gamma.$$

Übungsaufgaben. 1. Man forme (19 a) dadurch um, daſs man die Ausdrücke $1 + \cos A$ und $1 - \cos A$ bildet und durcheinander dividiert.

2. Man berechne A, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ gegeben ist. Insbesondere für $\alpha = 60^0$, 90^0, 108^0.

3. Welche Beziehung besteht unter den Seiten, wenn ein Flächenwinkel der Ecke ein rechter Winkel ist?

4. Man berechne die Neigungswinkel an den Kanten einer geraden dreiseitigen Pyramide (vgl. § 10, Aufg. 10).

5. Eine dreiseitige Pyramide ist durch ihre sechs Kanten $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = f$, $DB = g$, $DC = h$ bestimmt. Man berechne die sechs Neigungswinkel.

Man bezeichnet zweckmäſsig die Seiten durch $\measuredangle\,(fg), (fh), (gh)$; die Winkel (h), (g), (f) an der Ecke D. Dabei berechnet man entweder die Seiten und daraus die Winkel oder setzt die algebraischen Werte der *cos* und *sin* der Seiten in den Ausdruck (19 a) ein. Letzteres Verfahren ist im allgemeinen vorzuziehen.

Zahlenbeispiel:

$$a = 2,\ b = 3,\ c = 4,\ f = 7,\ g = 6,\ h = 5.$$

1. Man findet an der Ecke D:

$$\cos(fg) = \frac{23}{28},\ \cos(fh) = \frac{13}{14},\ \cos(gh) = \frac{19}{20};$$

$$\cos(f) = \frac{367}{45\sqrt{85}};\ \sin(f) = \frac{14\sqrt{191}}{45\sqrt{85}}.$$

2. Zur Probe an der Ecke A:

$$\cos(bf) = \frac{11}{14},\ \cos(cf) = \frac{29}{56},\ \cos(bc) = \frac{7}{8}.$$

Hieraus ergiebt sich derselbe Wert wie vorhin für $\cos(f)$.

3. Weiter folgt aus der Ecke D:

$$\cos(h) = \frac{-17}{9\sqrt{13}},\ \sin(h) = \frac{2\sqrt{191}}{9\sqrt{13}};$$

$$\cos(g) = \frac{83}{3\sqrt{1105}},\ \sin(g) = \frac{4\sqrt{191}}{3\sqrt{1105}}.$$

Der Lernende führe die Bestimmung auch für die Ecken B und C sowie für A völlig durch. Wir erhalten für die Ecke D in den Bezeichnungen α, β, γ; A, B, C folgende Zusammenstellung:

$$\cos a = \frac{19}{20},\ \cos\beta = \frac{23}{28},\ \cos\gamma = \frac{13}{14};$$

$$\sin a = \frac{\sqrt{39}}{20},\ \sin\beta = \frac{\sqrt{255}}{28},\ \sin\gamma = \frac{\sqrt{27}}{14};$$

$$\cos A = \frac{367}{45\sqrt{85}},\ \cos B = -\frac{17}{9\sqrt{13}},\ \cos C = \frac{83}{3\sqrt{1105}};$$

$$\sin A = \frac{14\sqrt{191}}{45\sqrt{85}},\ \sin B = \frac{2\sqrt{191}}{9\sqrt{13}},\ \sin C = \frac{4\sqrt{191}}{3\sqrt{1105}}.$$

Man beachte, dafs in allen Sinus der Neigungswinkel die Zahl $\sqrt{191}$ vorkommt. Sie ist eine sogenannte Invariante, und wir dürfen vermuten, dafs diese Zahl für die Pyramide irgend eine besondere Bedeutung haben wird. Die Werte obiger Winkel sind folgende:

$$a = 18^0\,11',7,\quad \beta = 34^0\,46',3,\quad \gamma = 21^0\,47',2;$$
$$A = 27^0\,47',9,\quad B = 121^0\,35',6,\quad C = 33^0\,39',9.$$

§ 12. Fortsetzung. Sinussatz.

In nebenstehender Fig. 23 sei CE senkrecht zur Ebene DAB, $EB \perp DB$, $EA \perp DA$. Dann ist auch $CB \perp DB$, $CA \perp DA$, und folglich $\sphericalangle\, CBE$ der Neigungswinkel der Ebenen CDB und ADB, $\sphericalangle\, CAE$ Neigungswinkel der Ebenen CDA und BDA. Die Figur bringt von der Ecke D nicht nur die drei Seiten, sondern auch zwei Winkel zur Anschauung. Wir setzen nun $\sphericalangle\, CDB = a$, $CDA = \beta$, $BDA = \gamma$ und entsprechend $\sphericalangle\, CAE = A$, $CBE = B$.

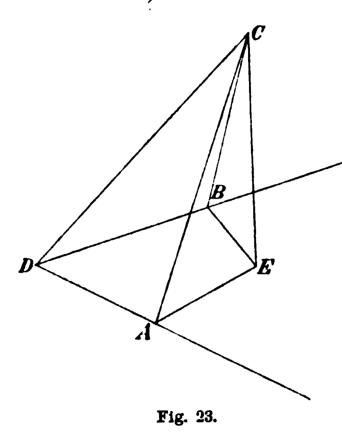


Fig. 23.

Setzen wir nun $DC = 1$, so wird: $BC = \sin a$, $CE = \sin a \sin B$, $CA = \sin\beta$, $CE = \sin\beta \sin A$;
daher: $\sin a \,.\, \sin B = \sin\beta \sin A$, oder:

$$\frac{\sin a}{\sin\beta} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Diese Formel heifst der Sinussatz der Ecke.

Unser obiges Zahlenbeispiel liefert die Bestätigung:

$$\frac{\sqrt{39}}{20} \cdot \frac{2\sqrt{191}}{9\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{255}}{28} \cdot \frac{14\sqrt{191}}{45\sqrt{85}}.$$

Dies ist richtig, da $39 = 3 \cdot 13$ und $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$.

Fig. 23 bringt eine Menge der wichtigsten Beziehungen an der Ecke zur Anschauung. Man kann aus derselben die Lösung folgender Aufgaben ableiten:

1. Von einer Ecke sind gegeben die Seiten α, β, γ. Man bestimme die Winkel durch Zeichnung und Rechnung.

Lösung. Setzt man $DC = 1$, so kennt man von dem rechtwinkligen Kreisvierecke $BDAE$ nach den frühern Bezeichnungen:

$$DB = \cos\alpha,\quad DA = \cos\beta,\quad \sphericalangle\, BDA = \gamma, \text{ daher:}$$

$$BE = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma}, \text{ also: } \frac{BE}{BC} = \cos B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}.$$

Die Zeichnung nimmt denselben Gang.

2. Gegeben zwei Seiten α, β und ein gegenüberliegender Winkel B.

Anleitung zur Lösung. Man kennt vom Vierecke $BDAE$ die Seiten BD, DA und BE.

3. Gegeben zwei Seiten α, γ und der eingeschlossene Winkel B.

Anleitung. Man kennt vom Vierecke $BDAE$ die Seiten BD, BE und den Winkel BDA.

4. Gegeben eine Seite γ und die beiden anliegenden Winkel A und B.

Anleitung. Setzt man $EC = 1$, so sind BE und AE alsbald bestimmbar, mithin das Viereck $BDAE$. Genau entsprechend verfährt die ***Lösung durch Rechnung.***

5. Gegeben eine Seite α und die Winkel A und B.

Anleitung. Durch Anwendung des Sinussatzes auf 2. zurückzuführen.

Noch kann man die Aufgabe stellen:

6. Gegeben die drei Winkel; man bestimme die drei Seiten. Zur Lösung derselben bedürfen wir jedoch noch einer weitern Darlegung. [S. Gl. (21).]

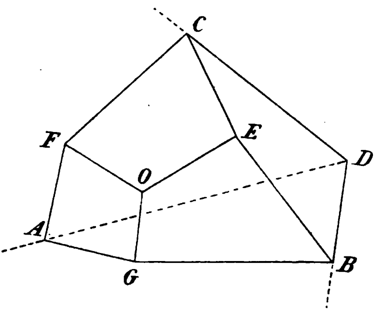


Fig. 24.

§ 13. Fortsetzung. Polarecke.

Innerhalb des von einer dreiseitigen Ecke gebildeten Hohlraumes wählen wir einen willkürlichen Punkt O (Fig. 24) und fällen von demselben auf die drei Kanten der Ecke die Senkrechten OA, OB, OC; ferner auf die drei Ebenen der Ecke die Senkrechten OE, OF, OG. In den drei Ebenen verbinden wir die Fufspunkte

der letztern Senkrechten mit denen der erstern. Dann ist in O die sehr bemerkenswerte Ecke, welche die Kanten OE, OF, OG aufweist, entstanden[1].

1. In den drei Ebenen, welche die Ecke bei D bilden, ist je ein rechtwinkliges Kreisviereck entstanden:

$$DBAG,\ DCAF,\ DBEC.$$

Denn $OA \perp DA$, $OG \perp DBGA$, also auch $AG \perp DA$ u. s. w. Folglich:

$$\sphericalangle\, CFA = 180^0 - \beta,\ BGA = 180^0 - \gamma,\ CEB = 180^0 - \alpha.$$

2. Weitere rechtwinklige Kreisvierecke sind:

$$FOGA,\ EOGB,\ EOFC.$$

Da nun die Winkel bei A, B, C die entsprechenden Neigungswinkel der die Ecke D bildenden Ebenen sind, so ist:

$$\sphericalangle\, FOG = 180^0 - A,\ EOG = 180^0 - B,\ EOF = 180^0 - C.$$

3. Letztere Winkel sind die Seiten der in O entstandenen Ecke, während die unter 1. genannten Winkel die Winkel dieser Ecke sind. Die bei O entstandene Ecke ist die Polarecke derjenigen bei D und umgekehrt.

Ursprüngl. Ecke:	Polarecke:
Seiten: α, β, γ.	Seiten: $180^0 - A$, $180^0 - B$, $180^0 - C$.
Winkel: A, B, C.	Winkel: $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$.

Wendet man den Kosinussatz auf die Polarecke an, so folgt:

$$\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}. \quad \ldots \quad (21)$$

Zahlenprobe s. S. 27.

Die Polarecke bildet das stereometrische Gegenstück zum rechtwinkligen Kreisviereck in der Ebene. Halbiert man DO und beschreibt mit der halben Strecke DO um den Mittelpunkt eine Kugel, so geht dieselbe durch die Punkte D, O, A, B, C, E, F, G.

Aufgabe. Es sei gegeben $\sphericalangle\, BDC = \alpha$, $CDA = \beta$, $BDA = \gamma$; ferner $AD = f$, $BD = g$, $CD = h$.

Man berechne $OE = x$, $OF = y$, $OG = z$.

Lösung. Man findet mit Hülfe der rechtwinkligen Kreisvierecke:

$$z = \frac{h \sin\gamma - f \sin\alpha \cos B - g \sin\beta \cos A}{\sin\beta \sin\gamma \sin A}.$$

Hieraus kann man OD ableiten und erhält so den Radius der Kugel, welche dem Tetraeder $ABCD$ umbeschrieben ist.

---

[1] Zur Veranschaulichung ist eine körperliche Darstellung von Fig. 24 heranzuziehen.

§ 14. Fortsetzung. Das Kugeldreieck.

Beschreibt man um den Punkt O (Fig. 25) eine Kugel, so schneidet dieselbe von den Kanten einer dreiseitigen Ecke, welche in O liegt, drei gleiche Stücke OA, OB, OC ab. Ferner entstehen die Kreisbogen AB, BC, AC, deren Radien dem Kugelradius gleich sind. Auf der Kugelfläche entsteht ein von diesen Kreisbogen begrenztes Dreieck, ein Kugeldreieck (sphärisches Dreieck von σφαῖρα, die Kugel). Nehmen wir nun den Radius der Kugel als Eins an, so erkennen wir, dafs die Seiten des Kugeldreiecks nichts anderes sind als die in natürlichem Mafs gemessenen Winkel AOB, AOC, BOC, dafs daher diesen Winkeln mit Rücksicht auf das Kugeldreieck der Name Seiten zukommt. Fragen wir nun nach den Winkeln des Kugeldreiecks, so müssen wir, um im Punkte A den Winkel der beiden Kreisbogen zu finden, an letztere im Durchschnittspunkte Tangenten legen. Beide Tangenten stehen senkrecht zum Radius OA und liegen in den Ebenen bezw. BAO und CAO. Sie bilden also den Neigungswinkel dieser Ebenen. Folglich sind die Neigungswinkel der Ecke bei O zugleich die Winkel des Kugeldreiecks ABC.

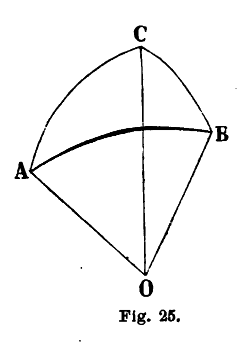


Fig. 25.

1. Lehrsatz. Jede durch eine Kugel gelegte Ebene durchschneidet die Oberfläche derselben (schneidet die Kugel) in einem Kreise.

Beweis. Fällt man vom Mittelpunkte O (Fig. 26) auf die Ebene des Schnittes die Senkrechte OA und verbindet den Fufspunkt A mit zwei willkürlichen Punkten B, C, welche der Kugel und der Ebene angehören, so ist $OAC \cong OAB$ (viertes Krit.) und daher $AB = AC$.

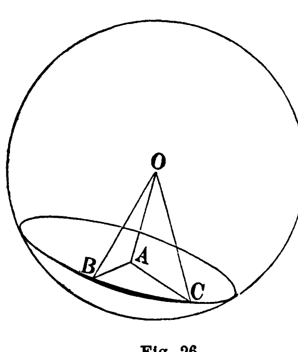


Fig. 26.

Dieser Satz läfst sich umkehren analog wie die entsprechenden Sätze der Planimetrie über Sehne, Sehnenmitte und Mittelpunkt des Kreises.

2. Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie oder eine Ebene auf dem Endpunkte eines Kugelradius senkrecht stehen, so berühren sie die Kugel.

Beweis. Greift man irgend einen andern Punkt der Geraden oder der Ebene heraus und verbindet ihn mit dem Mittelpunkte der Kugel, so sieht man, dafs sein Abstand vom Mittelpunkte gröfser ist als der Radius. Also haben jene Gerade und jene Ebene nur einen Punkt mit der Kugel gemeinsam, während ihre sämtlichen übrigen Punkte aufserhalb der Kugel liegen.

Auch dieser Satz gestattet entsprechende Umkehrungen. Auf die Kugel alsbald übertragbar ist auch der Lehrsatz von der Potenz am Kreise; ebenso der Satz, dafs die von einem Punkte an die Kugel gezogenen Tangenten gleich sind.

Eine durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise, dessen Radius dem Kugelradius gleich ist. Er heifst ein Hauptkreis oder gröfster Kreis der Kugel. Hauptkreise sind bei der als Kugel betrachteten Erde der Äquator und sämtliche Meridiane. Die Breitenkreise sind kleine Kreise.

3. *Aufgabe.* Man vergleiche (Fig. 26) den Bogen BC des um A beschriebenen Kreises mit dem Bogen des durch dieselben Punkte gelegten Hauptkreises.

Dreht man das Dreieck OBC um BC als Achse, bis O in die Ebene ABC gelangt, so schmiegt sich der mit dem gröfsern Radius beschriebene Kreisbogen der Sehne BC näher an als der mit dem kleinern Radius AB um A beschriebene entsprechende Bogen. Daher ist die Entfernung der Punkte BC auf der Kugelfläche längs des Hauptkreises geringer als längs des kleinen Kreises.

Dieser der Anschauung entnommenen Beweisführung kann man leicht eine strenge Form geben, worauf wir indes verzichten.

Löst man die Aufgabe rechnerisch und bezeichnet $\sphericalangle\, COA = BOA = a$, $BOC = \beta$, so ist $\sphericalangle\, BAC = B$. Drückt man die halbe Sehne BC doppelt aus, so findet sich:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sin a \sin\frac{B}{2} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Die zu vergleichenden Gröfsen sind $r\beta$ und $rB \sin a$.

Auf der Erdkugel würde, wenn OA die Erdachse darstellte, $\sphericalangle\, B$ der Längenunterschied der Orte B und C, $90^0 - a = \varphi$ die gemeinsame geographische Breite derselben sein.

Ist $x < y$, so ist $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{y}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{y}{2}}$ und darum zunächst $\cos\frac{x}{2} > \cos\frac{y}{2}$, mithin:

$$\frac{\sin x}{\sin y} > \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{y}{2}} > \frac{\sin \frac{x}{4}}{\sin \frac{y}{4}} \cdots\cdots > \frac{x}{y}.$$

Da $\beta < B$, so folgt aus (22):

$$\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = \sin a \cdot \frac{\beta}{B} < \sin a.$$

Hiermit ist die Vergleichung der beiden Entfernungen streng durchgeführt.

Zahlenbeispiel. Die beiden Städte Kasan und Kopenhagen haben fast dieselbe geographische Breite $\varphi = 55^0 42'.0$. Ihr Längenunterschied beträgt $B = 36^0 32'.0$. Wie grofs ist ihr Abstand, gemessen a) auf dem Hauptkreise, b) auf dem Parallelkreise?

Lösung. Nach (22) findet sich $a = 34^0 18',0$, daher $\beta = 20^0 20'.8$. Da nun 360^0 mit 40 000 *km* gleichwertig sind, so beträgt die Entfernung der beiden Orte auf dem Hauptkreise 2260.7 *km*. Der Umfang des kleinen Kreises beträgt $2 r \pi \cdot \sin a$ $= 40\,000 \sin a$ *km*, daher der Bogen $BC = 2287.5$ *km*. Der Unterschied beträgt mithin 26.8 *km* mehr für den Parallelbogen.

4. ***Lehrsatz.*** In jedem sphärischen Dreiecke ist die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte. — Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes, dafs bei jeder dreiseitigen Ecke die Summe zweier Seiten gröfser ist als die dritte.

Aus diesem Satze kann man die Folgerung ziehen, dafs unter allen auf der Kugelfläche zwischen zwei Punkten derselben gezogenen Verbindungslinien ein Bogen des Hauptkreises der kürzeste Weg ist. Ein auf der Kugelfläche zwischen den Punkten B und C straff gespannter Faden nimmt die Form des Hauptkreises an. Hauptkreise sind auf der Kugelfläche die geradesten Linien. Errichtet man auf einer geradesten Linie der Kugelfläche in allen Punkten derselben geradeste Linien als Senkrechte von gleicher Länge, so liegen die Endpunkte derselben nicht wieder auf einer geradesten Linie. Die Nichtbeachtung dieses Umstandes hat in der Planimetrie zu Scheinbeweisen des Parallelenaxioms geführt.

5. ***Aufgabe.*** Gegeben Länge und Breite zweier Orte M und J auf der als Kugel betrachteten Erde. Wie grofs ist die Entfernung derselben in kürzester Linie?

Lösung. AB (Fig. 27) sei die Erdachse, und zwar sei, um bestimmte Vorstellungen zu bilden, A der Nordpol, B der Südpol, C der Mittelpunkt. Dann ist $AJEB$ als Schnitt einer durch die Erdachse und den Punkt J gelegten Ebene der Meridian von J

und der Winkel JCE — der Neigungswinkel des Erdradius JC zur Äquatorialebene — die geographische Breite des Punktes J. Ebenso ist MCD die geographische Breite von M. Der Winkel DCE ist der Neigungswinkel der beiden Meridianebenen und gegeben durch den Längenunterschied der beiden Orte M und J. Denn denkt man sich den Äquator in 360 Grade geteilt und durch jeden Teilpunkt und die Erdachse eine Halbebene gelegt, so erhält man 360 Meridiane, welche, von einem beliebigen Nullpunkt aus (Ferro, Paris, Greenwich) von Westen nach Osten gezählt, die östliche Länge jedes Ortes bestimmen.

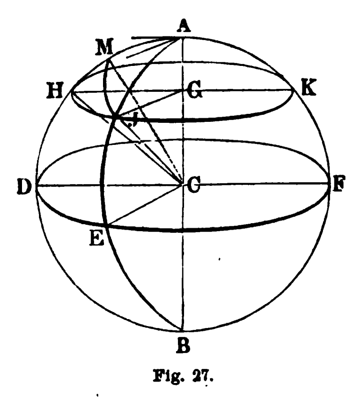


Fig. 27.

Ist φ nun die Breite von M, ψ von J, so ist $\sphericalangle MCA = 90^0 - \varphi$, $JCA = 90^0 - \psi$; und ist der Längenunterschied ω, so kennt man von der Ecke $MAJC$ in C zwei Seiten und den von ihnen gebildeten Winkel. Für die dritte Seite $\gamma = \sphericalangle MCJ$ finden wir daher:

$$\cos\gamma = \cos(90^0 - \varphi)\cos(90^0 - \psi) + \sin(90^0 - \varphi)\sin(90^0 - \psi)\cos\omega,$$

oder:

$$\cos\gamma = \sin\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi\,\cos\omega. \quad . \quad . \quad (22)$$

Beispiel. Man berechne den kürzesten Abstand zwischen Santiago ($33^0\,26',4$ südl. Breite, $52^0\,58',4$ westl. Länge) und Berlin ($52^0\,30',3$ nördl. Breite, $31^0\,3',5$ östl. Länge).

In diesem Falle ist $\varphi = -33^0\,26',4$, $\psi = 52^0\,30',3$, $\omega = 84^0\,1',9$.

Setzen wir $\varphi = -\varphi'$, so wird:

$$\cos\gamma = -\sin\varphi'\,\sin\psi + \cos\varphi'\,\cos\psi\,\cos\omega;$$

$\log\sin\varphi' = 9{,}74\,121$
$\log\sin\psi = 9{,}89\,951$
$\log m = 9{,}64\,072 - 10;$

$\log\cos\varphi' = 9{,}92\,141$
$\log\cos\psi = 9{,}78\,439$
$\log\cos\omega = 9{,}01\,695$
$\log n = 8{,}72\,275 - 10;$

$m = 0{,}43724$
$n = 0{,}05281$
$\cos\gamma = -0{,}38443;$

$\cos(180^0 - \gamma) = 0{,}38443$
$\log\cos(180^0 - \gamma) = 9{,}58482 - 10$
$180^0 - \gamma = 67^0\,23',5$
$\gamma = 112^0\,36',5.$

Da nun 360° mit 40 000 *km* gleichwertig sind, so ergiebt sich durch Umrechnung in Bogenminuten als Kilometerzahl:

$$\frac{6756{,}5 \cdot 40\,000}{360 \cdot 60} = 12\,512 \; km.$$

Anmerkung 1. Geographische Länge und Breite bestimmen unzweideutig einen Ort auf der Erdoberfläche. Dieselben spielen die Rolle der Koordinaten.

Anmerkung 2. Aufgaben über die dreiseitige Ecke lassen sich alsbald umreden in Aufgaben für das Kugeldreieck und umgekehrt. Vorhin haben wir die Aufgabe gelöst, die dritte Seite eines Kugeldreieckes zu bestimmen, wenn zwei Seiten und der von denselben gebildete Winkel gegeben sind. Ferner kann man in und um jedes Kugeldreieck Kreise beschreiben. Der Gedankengang ist ähnlich wie beim ebenen Dreieck. Als Vorbereitung diene der Nachweis [Fig. 23, Gl. (20)], dafs auch im Kugeldreieck gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen.

Andere hier zu behandelnde Aufgaben liefert die astronomische Geographie. Man betrachtet an der Himmelskugel dasjenige Dreieck, dessen Eckpunkte der Weltpol, das Zenith des Beobachters und der Mittelpunkt der Sonnenscheibe sind. Bezeichnen wir diese Punkte der Reihe nach durch W, Z, S. Dann ist $WS = 90^0 - \delta$, wenn δ die (nördliche) Deklination der Sonne, $ZW = 90^0 - \varphi$, wenn φ die (nördliche) Breite des Beobachtungsortes ist, und $ZS = 90^0 - h$, wenn h die Sonnenhöhe bedeutet. Der Winkel SWZ bestimmt dann die wahre Zeit, der Winkel WZS das Azimut der Sonne. Ist $h = 0$, so hat man den astronomischen Aufgang der Sonne. — Man findet, $t = \sphericalangle SWZ$,

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\delta \sin\varphi}{\cos\delta \cos\varphi}. \quad \ldots \quad (23)$$

§ 15. Die Oberfläche der Kugel.

Wenn wir an die Darlegungen des § 7 anknüpfen, so können wir uns ohne Mühe überzeugen, dafs die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels durch die dort gegebene Formel (13)

$$M = (r + \rho)\, s\pi$$

richtig bestimmt wird. Man denke sich zunächst den abgestumpften Kegel zu einem Vollkegel ergänzt und dann den Mantel des Vollkegels in unzählige kleine Dreiecke zerschnitten, deren Spitzen in der Spitze des Kegels zusammmenlaufen. Die Ebene jedes Schnittes gehe durch die Achse des Kegels, so dafs jede Seite

eines jeden Dreiecks Seite des Kegels und die Grundlinie eines jeden Dreiecks ein unendlich kleines Stück vom Umfange des Kegelgrundkreises wird. Dann zerfällt der Mantel des abgestumpften Kegels in zahllose Paralleltrapeze, deren parallele Seiten unendlich kleine Stücke vom obern oder untern Begrenzungskreise, deren Höhe aber die Seite des abgestumpften Kegels s ist. Daher ist der Inhalt eines solchen Paralleltrapezes $\frac{1}{2} s (\alpha + \beta)$, wo α ein Stück der Peripherie des obern Begrenzungskreises $2 \rho \pi$, β ein Stück des untern $2 r \pi$ betragenden Kreisumfanges ist. Die Summe aller Paralleltrapeze wird

$$M = \frac{1}{2} s (\alpha + \beta + \alpha' + \beta' + \alpha'' + \beta'' + \cdots),$$

$$M = s \pi (r + \rho).$$

In dem Halbkreise $ABCH$ (Fig. 28) seien die beiden parallelen Halbsehnen BD und CE gezogen, $BD \parallel CE \perp AH$. F, die Mitte der Sehne BC, sei mit O verbunden. Lassen wir nun die ganze Figur sich um AH als Achse herumdrehen, so beschreibt der Bogen BC die Zone einer Kugel, deren Höhe DE ist. Die Sehne BC beschreibt den Mantel eines abgestumpften Kegels. Nehmen wir BC klein genug, so geht der Mantel des abgestumpften Kegels mit jeder beliebigen Annäherung in die entsprechende Kugelzone über. Hierdurch gewinnen wir ein Mittel, eine Kugelzone mit unendlich kleiner Höhe zu berechnen. In der That, der Mantel jenes abgestumpften Kegels ist

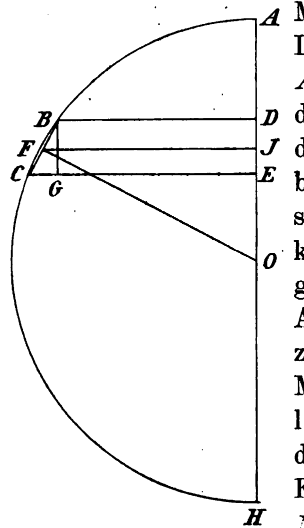


Fig. 28.

$$M_0 = BC \cdot \pi (BD + CE) = 2 BC \cdot \pi \cdot FJ.$$

Nun ist aber $FJO \sim BGC$, also

$FJ : FO = BG : BC$, daher $FJ \cdot BC = FO \cdot BG$; also:

$$M_0 = 2\pi \cdot FO \cdot BG = 2\pi \cdot FO \cdot DE.$$

Wenn wir jetzt die beiden Linien BD und CE sich unendlich nähern lassen, so wird der Bogen BC mit der Sehne BC gleich, und die Kugelzone kann als Kegelmantel angesehen werden. Gleichzeitig wird $FO = r$, gleich dem Kugelradius. Hat also eine Kugel den Radius r, sind ferner durch dieselbe im Abstande h_0

zwei unendlich nahe parallele Schnitte geführt, so hat das durch diese Schnitte begrenzte Oberflächenstück (Kugelzone) den Flächeninhalt $2r\pi h_0$. Hiernach sind wir nun in den Stand gesetzt, die krumme Fläche jeder Kugelzone zu bestimmen. Wenn die beiden Parallelkreise, welche die fragliche Zone begrenzen, den Abstand h haben, so zerlegen wir diesen Abstand in unendlich viele unendlich kleine Teile und legen durch jeden Teilpunkt einen Parallelschnitt. Dann zerfällt die zu bestimmende Zone in unendlich viele schmale Schnitte, und jeder Schnitt hat die Gröfse $2r\pi h_m$, wenn h_m die unendlich kleine Höhe der kleinen Kugelzone ist. Die Summe aller Teilzonen ist also:

$$2r\pi(h_0 + h_1 + h_2 + \ldots) = 2r\pi h.$$

Die Oberfläche einer Kugelzone von der Höhe h, d. h. ein Stück der Kugelfläche, welches von zwei Parallelkreisen, deren Ebenen den Abstand h haben, begrenzt wird, hat die Gröfse

$$S = 2r\pi h. \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Diese Formel läfst sich in eigentümlicher Weise der Anschauung näher bringen. Denken wir uns die Kugel in einen Cylinder gerollt, der denselben Grundkreisradius r besitzt, in den sie also gerade hineinpafst, so schneiden zwei parallel zur Grundfläche des Cylinders geführte Schnitte aus dem Mantel des Cylinders und aus der Kugelfläche zwei inhaltsgleiche Stücke heraus. Wir wollen diesen Cylinder den Archimedischen Cylinder nennen.

Die Formel (24) giebt auch die Oberfläche einer Kugelkappe mit der Höhe h an. Selbstverständlich ist nur die krumme Oberfläche gemeint.

Nimmt man $h = 2r$, so erhält man die Oberfläche der Kugel, also $4r^2\pi$.

Der Archimedische Cylinder steht zur Kugel in vielfacher Beziehung. Ist A irgend ein Punkt der Kugelfläche und fällt man AB senkrecht zur gemeinsamen Achse, so wird AB über A hinaus verlängert den Cylinder in einem bestimmten Punkte B_1 treffen. Mithin entspricht jedem Punkte der Kugeloberfläche ein bestimmter Punkt der Cylinderfläche. Man kann daher die Kugelfläche auf den Cylinder abbilden. Denkt man die Kugel als Erdkugel und nimmt ihre Achse zur Achse des Cylinders, so werden die Meridiane zu geraden Linien, die Breitenkreise zu jene geraden Linien senkrecht schneidenden Kreisen, also nach Abrollung des Cylinders ebenfalls zu geraden Linien. Dies ist die Abbildung des Mercator.

§ 16. Fortsetzung. Kugelzweieck und Kugeldreieck.

Betrachten wir (Fig. 27) das Kugelzweieck $BDAEB$. Ist der Neigungswinkel der Ebenen desselben DCE oder der Winkel der in A an die beiden Kreislinien gezogenen Tangenten gleich a, so ist der Flächeninhalt des Kugelzweiecks, wenn a in Gradmafs gegeben ist, $4r^2\pi\frac{a}{360}$.

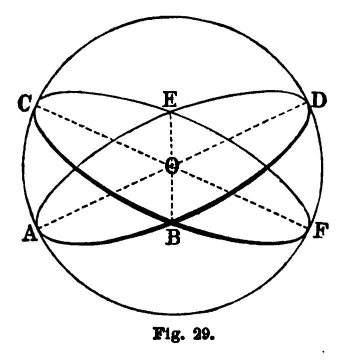
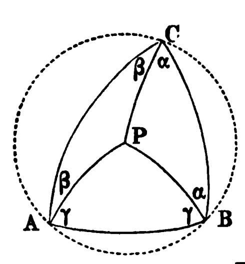


Fig. 29.

Wenn wir die drei Eckpunkte A, B, C des sphärischen Dreiecks ABC (Fig. 29) betrachten und ihre Gegenpunkte D, E, F auf der Kugelfläche bestimmen, so entsteht das Gegendreieck DEF, welches in der Gröfse seiner Seiten und Winkel genau mit dem ursprünglichen Dreiecke übereinstimmt. Dennoch sind die beiden Dreiecke nicht kongruent, sondern nur symmetrisch. Dabei ist aber der Flächeninhalt beider Dreiecke derselbe. Hiervon überzeugt man sich durch Betrachtung der umbeschriebenen Kreise (Fig. 30). Man zeigt nämlich durch Winkelberechnung mit Hülfe der Gleichungen $A = \beta + \gamma$ u. s. w., dafs $\gamma' = \gamma$ ist, und hat so die beiden symmetrischen Dreiecke in drei gleichschenklige, welche entsprechend kongruent sind, zerlegt.



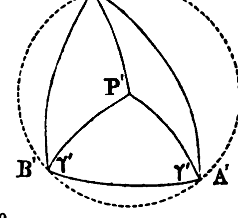


Fig. 30.

Nennen wir nun (Fig. 29) den Inhalt des Dreiecks ABC x, so ist

$$\text{Inhalt des Dreiecks } CBD = 4r^2\pi\cdot\frac{A}{360} - x,$$

$$\text{„ „ „ } CED = 4r^2\pi\cdot\frac{C}{360} - x,$$

$$\text{„ „ „ } ACE = 4r^2\pi\cdot\frac{B}{360} - x,$$

daher durch die über $ABDE$ stehende Halbkugel:

$$2r^2\pi = 4r^2\pi\,\frac{A+B+C}{360} - 2x.$$

Mithin:

$$x = \frac{r^2\pi}{180}(A + B + C - 180^0)\cdot \quad \ldots \quad (25)$$

Diese Formel setzt voraus, dafs die Winkel A, B, C in Gradmafs gegeben sind.

Aufgaben. 1. Wie grofs ist der Inhalt eines sphärischen Dreiecks, dessen Winkel $A = B = C = 90^0$ sind?

2. Wie grofs ist der Inhalt eines sphärischen Vierecks mit den Winkeln A, B, C, D?

Lösung: $\frac{r^2\pi}{180}(A + B + C + D - 360^0)$.

Ebenso für ein Fünfeck:

$$\frac{r^2\pi}{180}(A + B + C + D + E - 540^0).$$

3. Man bestimme auf der Oberfläche der Kugel ein regelmäfsiges sphärisches Dreieck, welches dem n^{ten} Teile der Kugelfläche gleich würde.

Lösung: $$A = 60^0 + \frac{240^0}{n}.$$

Für die Seite a erhalten wir nach (21)

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos^2 A}{\sin^2 A}, \quad \cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Für } n &= 4 \text{ wird } A = 120^0, \quad \frac{a}{2} = 54^0\,44',1, \\ \text{„ } n &= 8 \quad \text{„} \quad A = 90^0, \quad a = 90^0, \\ \text{„ } n &= 20 \quad \text{„} \quad A = 72^0, \quad \frac{a}{2} = 31^0\,43',1. \end{aligned}$$

Diese drei Beispiele sind darum bemerkenswert, weil die Winkel A genaue Teiler von 360^0 sind und darum die ganze Kugelfläche mit solchen Dreiecken überzogen, also wirklich in 4, 8, 20 gleiche Teile zerlegt werden kann. Die so gewonnenen Eckpunkte bilden die Eckpunkte von drei regelmäfsigen Körpern, dem Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder.

4. Dieselbe Aufgabe für das Viereck liefert

$$A = 90^0 + \frac{180^0}{n}$$

und für das Fünfeck $A = 108^0 + \frac{144^0}{n}$.

So gelangen wir zum Hexaeder und zum Dodekaeder.

Damit A der genaue m^{te} Teil von 360^0 werde, mufs sein

$$m = \frac{4n}{n+2} \text{ bezw. } \frac{10n}{3n+4}.$$

Und hier erhält man für m den brauchbaren Wert 3 nur, wenn $n = 6$ oder 12 gesetzt wird.

5. Wie grofs würde der Flächeninhalt eines regelmäfsigen Kugeldreiecks auf der Erdoberfläche sein, wenn die Seite des-

selben die Länge von a *km* besäfse? — Man bestimmt zunächst die Seite in Gradmafs und dann den Winkel des Dreiecks.

§ 17. Ausmessung des Rauminhalts.

Wir haben bisher die Ausmessung der Raumgebilde nur unter der Voraussetzung vorgenommen, dafs dieselben gerade seien. Lassen wir diese Voraussetzung jetzt fallen. Wir betrachten zunächst ein schiefes Prisma, und zwar der Einfachheit wegen ein dreiseitiges (Fig. 31). Denken wir uns neben demselben ein gerades über derselben Grundfläche ABC und von gleicher Höhe DE errichtet und schneiden nun beide Körper durch unzählige, in gleichem Abstande voneinander parallel zur Grundfläche gelegte Ebenen, so zerfallen beide in eine gleiche Anzahl unendlich dünner Platten. Die einzelnen Platten, welche aus dem schiefen Prisma hervorgehen, sind nun den aus dem geraden hervorgehenden gleich. Denn werden die schiefen Teile durch senkrecht gegen die Platte geführte Schnitte beseitigt, so können dadurch nur Teile wegfallen, welche im Verhältnis zur Platte selbst unendlich klein sind. — Der Lernende mache sich dies durch Veranschaulichung an einem körperlichen Gegenstande klar.

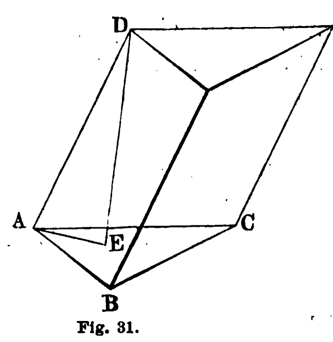


Fig. 31.

Hierin liegt ein sehr wichtiger geometrischer Gedanke. Denn die obige Beweisführung bleibt richtig, wenn auch nicht die einzelnen Schnittflächen unter sich gleich sind wie beim Prisma. So erkennt man die Richtigkeit des Satzes:

Zwei Körper sind gleich, wenn in gleicher Höhe bei beiden geführte Schnitte stets gleiche Flächen ergeben. Vgl. S. 14. Hauptsatz des Cavalieri.

Der Inhalt eines beliebigen Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Lehrsatz. Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind einander gleich.

Beweis. Legt man durch die Pyramide (Fig. 32) den Parallelschnitt $\alpha\beta\gamma\delta$, so sind die Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ u. s. w. den entsprechenden Seiten der Grundfläche AB, BC u. s. w. nach § 10, 13

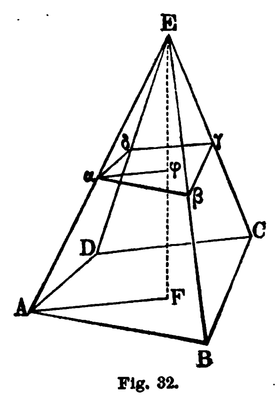


Fig. 32.

parallel, daher die entsprechenden Winkel gleich. Ferner schlagen $E\alpha A$, $E\beta B$ u. s. w. die Ähnlichkeitsbrücken, so dafs ist $E\alpha : EA = \alpha\beta : AB = E\beta : EB = \beta\gamma : BC$ u. s. w., also auch

$$\alpha\beta : AB = \beta\gamma : BC.$$

Hieraus folgt, dafs die Figuren $\alpha\beta\gamma\delta$ und $ABCD$ ähnlich sind. Ihre Inhalte verhalten sich also wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten, etwa wie $\alpha\beta^2 : AB^2$, daher auch wie $E\alpha^2 : EA^2$, und wenn φ der Fufspunkt des Lotes von E auf die Ebene des Schnittes ist, wie $E\varphi^2 : EF^2$.

Bezeichnen wir nun den Inhalt der Grundfläche mit G, der Schnittfläche mit Γ, den Abstand der Grundfläche von der Spitze, die Höhe der Pyramide, mit h, den Abstand der Schnittfläche von der Spitze mit k, so ist

$$\Gamma : G = k^2 : h^2,$$

daher:

$$\Gamma = \frac{k^2 G}{h^2}. \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

In diesem Ausdrucke für Γ kommt nur h, G und k vor. Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe haben daher in gleichem Abstande von der Spitze k gleiche Schnittflächen Γ. Damit ist unsere Behauptung bezüglich der Gleichheit ihres Inhaltes bewiesen.

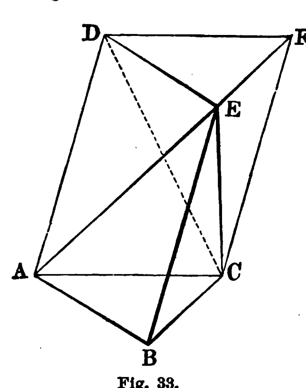


Fig. 33.

Nun kann man ein dreiseitiges Prisma (Fig. 33) durch die Schnitte EAC und DEC in drei Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe zerlegen.

$ABCE = DEFC$; $DEF \cong ABC$, Höhe des Prismas beiden gemeinsam;

$DEFC = DCAE$; $DCF \cong CDA$, Abstand des Punktes E vom Viereck $DACF$ ist gemeinsame Höhe.

Daher ist die dreiseitige Pyramide der dritte Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, also ihr Inhalt durch die Formel gegeben:

$$\Delta = \frac{1}{3} Gh. \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

Eine andere Ableitung s. „100 Aufgaben“ S. 111.

Setzt man $F\varphi = h$, $\varphi E = x$, so folgt:

$$x^2 : (x + h)^2 = \Gamma : G,$$

$$x : (x + h) = \sqrt{\Gamma} : \sqrt{G},$$

$$x = \frac{h\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{G} - \sqrt{\Gamma}};\ x + h = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{\Gamma}}.$$

Daher der Inhalt der abgestumpften Pyramide $ABCD\,\alpha\beta\gamma\delta$:

$$\Delta = \frac{h}{3}\,\frac{G\sqrt{G} - \Gamma\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{G} - \sqrt{\Gamma}} = \frac{h}{3}\,(G + \Gamma + \sqrt{G\Gamma})\ldots \quad (28)$$

Für den Kegel erhält man alsbald hieraus die Formeln, welche unter (12) und (13) bereits mitgeteilt sind.

Überzieht man die Kugelfläche mit einem Netze von unendlich vielen unendlich kleinen Dreiecken und verbindet die Eckpunkte eines jeden Dreiecks mit dem Mittelpunkte, so entsteht eine dreiseitige Pyramide, deren Höhe der Kugelradius r ist. Ihr Inhalt ist also $\frac{1}{3}\,a r$, wenn a das kleine Oberflächenstück, welches ihre Grundfläche ausmacht, bedeutet. Bildet man die Summe aller dieser Pyramiden, also

$$\frac{1}{3}\,r\,(\alpha + \beta + \gamma + \cdots),$$

so erhält man den Inhalt der Kugel. Der Klammerausdruck wird bei dieser Addition gleich der Kugeloberfläche, daher also der Inhalt der Kugel:

$$V = \frac{4}{3}\,r^3\pi. \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Um den Rauminhalt eines Kugelausschnittes zu bestimmen, machen wir dieselbe Schlufsfolgerung, indem wir die Kugelkappe mit einem Netze kleiner Dreiecke überziehen. Der Inhalt wird:

$$V = \frac{2}{3}\,r^2 h\pi, \ldots \quad (29)$$

wenn h die Höhe der Kugelkappe bedeutet. Es ist nun (Fig. 34) $OA = r - h$, $AC^2 = r^2 - (r - h)^2 = 2\,rh - h^2$, daher nach Subtraktion des über der Kugelkappe stehenden Mittelkegels der Inhalt des Kugelabschnittes:

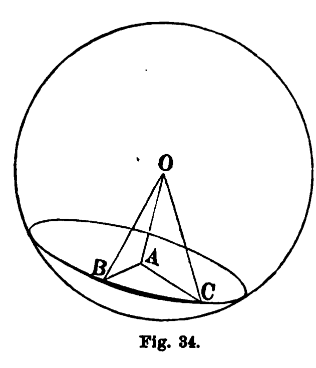


Fig. 34.

$$\frac{2}{3}\,r^2 h\pi - \frac{1}{3}\,(r - h)\,(2\,rh - h^2)\,\pi,$$

$$V = rh^2\pi - \frac{1}{3}\,h^3\pi. \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Eine andere Methode zur Ableitung dieser Formel bietet der Archimedische Cylinder. Denkt man sich die drei in Fig. 35 vereinigten Körper nebeneinander auf derselben Grundebene aufgestellt, aber den Kegel mit der Spitze nach unten und seine Grundebene in gleicher Ebene mit der obern Begrenzungsebene des Cylinders, dann im Abstande k einen Schnitt parallel zur Grundebene AEB des Cylinders geführt, so haben wir:

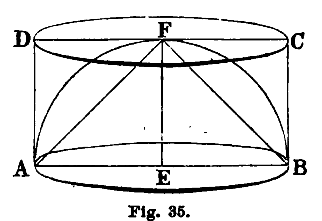


Fig. 35.

Der Inhalt des Schnittes durch den Cylinder ist $r^2\pi$,

„ „ „ „ „ die Kugel „ $(r^2 - k^2)\pi$,

„ „ „ „ „ den Kegel „ $k^2\pi$.

Folglich ist der Inhalt einer Kugelzone, welche von einem Hauptkreise und einem im Abstande k parallel zum Hauptkreise geführten Schnitte begrenzt wird, gleich dem Unterschiede der entsprechenden Stücke des Cylinders und Kegels oder

$$V = r^2 k\pi - \frac{1}{3} k^3\pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Addieren wir (30) und (17) und ersetzen k durch $r - h$, so wird

$$V_1 + V_2 = rh^2\pi + r^2(r - h)\pi - \frac{1}{3}h^3\pi - \frac{1}{3}(r - h)^3\pi.$$

Nach Ausführung der angedeuteten Rechnungen ergiebt sich der Inhalt der Halbkugel.

§ 18. Übungen.

Zunächst sind die § 8 gestellten Rechnungsaufgaben an andern Zahlenbeispielen wiederholt zu lösen.

1. Gegeben die drei in einer Ecke eines Tetraeders zusammenstofsenden Kanten f, g, h und die von ihnen gebildeten Winkel

$$\sphericalangle (gh) = \alpha, \ (fg) = \gamma, \ (fh) = \beta.$$

Man bestimme den Inhalt der Pyramide.

Lösung.

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{6} fgh \sin\alpha \sin\beta \sin C, \\ 36\Delta^2 &= f^2g^2h^2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma), \\ 9\Delta^2 &= f^2g^2h^2 \sin\sigma \cdot \sin(\sigma - \alpha) \cdot \sin(\sigma - \beta) \cdot \sin(\sigma - \gamma), \\ 2\sigma &= \alpha + \beta + \gamma. \end{aligned}\right\} (31)$$

Für unser Zahlenbeispiel $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $f = 7$, $g = 6$, $h = 5$ erhalten wir $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{191}$ und damit den früher erwähnten Aufschlufs über die Bedeutung der Zahl $\sqrt{191}$ für unsere Pyramide.

2. Über einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche steht eine Pyramide mit gleichen Seitenkanten. Man bestimme den Inhalt. Die Dreiecksseite sei a, die Seitenkante b.

Lösung. $\Delta = \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}$.

Diese Lösung kann auf mehrfache Art durch geometrische Überlegung und Rechnung gefunden werden.

3. Man bestimme in einem rechtwinkligen Tetraeder, in welchem $\measuredangle (fg) = (fh) = (gh) = 90^0$, die von der Ecke (fgh) auf die Gegenfläche gefällte Höhe p.

Lösung.
$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{h^2}}}.$$

Man vergleiche die Lösung S. 4 Nr. 5.

4. Verbindet man in einem rechtwinkligen Tetraeder die Mitten der Seiten des Gegendreiecks mit der rechtwinkligen Ecke und untereinander, so erhält man ein Tetraeder mit gleichen Gegenkanten. Warum? Wie grofs sind die Kanten dieses Tetraeders, und wie grofs ist sein Inhalt?

5. Man bestimme den Inhalt eines Tetraeders, für welches die Gegenkanten gleich sind: $f = a$, $g = b$, $h = c$.

Lösung. Die vier Seitenflächen dieses merkwürdigen Tetraeders sind kongruente Dreiecke. Man findet daher nach (31) (3. Gl.):

$$\Delta = \frac{1}{12} \sqrt{2} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Für dieses Tetraeder findet man den Radius der umbeschriebenen Kugel r durch die Gleichung: $8r^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Für die Flächenwinkel erhält man:

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Es ist aber $\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$, daher:

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}.$$

Durch Bildung von $1 + \cos A$ und $1 - \cos A$ kann man weitere einfache Beziehungen erhalten.

Weitere Aufgaben siehe „100 Aufgaben" Nr. 69 bis 78.

6. Schneidet man ein Tetraeder durch eine zur Grundfläche schiefe Ebene, so erhält man als Durchschnitt des Tetraeders ein Dreieck EFG und als Durchschnitt der Ebene mit der Grundfläche eine gerade Linie. Auf dieser geraden Linie müssen also die Schnittpunkte entsprechender Seiten des Grunddreiecks ABC

und des Schnittdreiecks EFG liegen. Welcher planimetrische Lehrsatz ergiebt sich hieraus durch Projektion des Tetraeders auf eine beliebige Ebene?

7. Wenn eine Ebene drei Kugeln von aufsen berührt, so geht sie durch die drei äufsern Ähnlichkeitspunkte der drei Kugeln. Diese drei Ähnlichkeitspunkte liegen aber auch in einer Ebene, welche die Mittelpunkte der drei Kugeln enthält. Welcher planimetrische Lehrsatz ergiebt sich hieraus? Wieviel Ebenen können überhaupt drei gegebene Kugeln gleichzeitig berühren?

8. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch zwei feste Punkte A und B gehen, ist eine Ebene, welche zu AB in der Mitte dieser Strecke senkrecht steht. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch drei gegebene Punkte A, B, C gehen, ist eine Gerade, welche zur Ebene ABC senkrecht steht. Ihr Fufspunkt ist der Mittelpunkt des durch die drei Punkte A, B, C gelegten Kreises. Diese Behauptungen sind durch Kongruenz von Dreiecken zu beweisen.

9. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche zwei gegebene Ebenen berühren, ist eine gewisse Ebene; welche drei gegebene Ebenen berühren, eine gewisse Gerade. Man treffe die näheren Bestimmungen.

10. Man bestimme den Abstand der Mitten zweier Gegenkanten eines gegebenen Tetraeders.

11. Eine Kugel zu beschreiben, welche durch drei gegebene Punkte A, B, C geht, und deren Mittelpunkt in einer gegebenen Ebene liegt. — Die Lagenbeziehung ist durch Aufg. 8 klar. Will man auch Gröfsenbestimmungen, so mufs die Ebene genauer festgelegt sein, etwa durch ihren Durchschnitt und ihren Neigungswinkel zur Grundebene der drei Punkte. Um aus diesen Stücken nun den Radius der gesuchten Kugel zu bestimmen, hat man eine passende Zeichnungsebene auszuwählen. Als solche eignet sich eine Ebene, welche durch den Mittelpunkt des durch A, B, C gelegten Kreises geht und zur Grundebene wie auch zur gegebenen Ebene senkrecht steht.

12. Eine Kugel zu bestimmen, welche durch drei gegebene Punkte A, B, C geht und eine gegebene Kugel berührt. — Eine Gerade ist als geometrischer Ort des gesuchten Mittelpunktes sofort erkennbar. Die Lösung nach Lagen- und Gröfsenbeziehungen liefert diejenige Zeichnungsebene, welche diese Gerade und den Mittelpunkt der gegebenen Kugel enthält.

13. Eine Kugel zu bestimmen, welche durch zwei gegebene Punkte A, B geht und zwei gegebene Ebenen α, β berührt. Man bestimme die Halbierungsebene γ, fälle von A auf γ ein Lot und verlängere es um sich selbst bis C, so hat man eine der vorigen Aufgaben. Hiermit sind die Lagenbeziehungen erledigt. Für die Bestimmung der Gröfsenbeziehungen nehme man die Halbierungsebene als Grundebene. In derselben ist der Durchschnitt der Ebenen α, β, die Projektion der Punkte A, B vorhanden; ferner ist der gleiche Neigungswinkel der Ebenen α, β zur Ebene γ und sind die Abstände der Punkte A, B von γ gegeben.

14. Eine Kugel zu bestimmen, welche durch zwei Punkte A, B geht und zwei Kugeln mit den Mittelpunkten C, D berührt. Man bestimme den (äufsern) Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Kugeln E und verbinde ihn mit A. Dann kann man auf EA einen dritten Punkt der gesuchten Kugel bestimmen. Vgl. „100 Aufgaben“ Nr. 39.

15. Man bestimme durch Zeichnung oder Rechnung die in einen Kugelsektor, in eine Kugelkappe, einen geraden Kegel, eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche u. s. w. beschriebenen Berührungskugeln.

16. Der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus gleiche Tangenten an zwei gegebene Kugeln gezogen werden können, ist eine gewisse Ebene. Man bestimme dieselbe. Zwei Kugeln schneiden sich unter dem Winkel, den zwei Tangentialebenen in einem Punkte ihres Schnittkreises bilden.

17. Man bestimme eine Kugel, welche durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Kugel rechtwinklig schneidet. Man bestimme eine Kugel, welche vier gegebene Kugeln rechtwinklig schneidet.

18. Die Sätze über umgekehrte Abbildung (vgl. „100 Aufgaben“ S. 58) können auf Kugel und Ebene übertragen werden. Fällt man vom Mittelpunkte A eines Kreises auf eine in seiner Ebene liegende Gerade eine Senkrechte, welche die Gerade im Punkte B und den Kreis in den Punkten C, C_1 treffen möge, so ist jeder der Punkte C, C_1 Augenpunkt einer umgekehrten Abbildung des Kreises auf die Gerade, und umgekehrt. Lassen wir nun die ganze Figur sich um die Achse AB herumdrehen, so wird aus der Geraden eine Ebene und aus dem Kreise eine Kugel. Man bestimme das Bild einer gegebenen Ebene, einer gegebenen Kugelfläche.

19. Bei der **stereographischen Polarprojektion** der **Erdkugel** ist der eine Pol der Augenpunkt, der andere Pol Berührungspunkt der Bildebene. Die Meridiane werden bei dieser Abbildung Gerade, die Breitenkreise koncentrische Kreise. — Wie ist ein solches Gradnetz also zu zeichnen?

20. Bei der **stereographischen Äquatorialprojektion** ist ein Punkt des Äquators Augenpunkt, während die Bildebene die Kugel in dem diametral gegenüberliegenden Punkte berührt. Wie bei der umgekehrten Abbildung in der Ebene sich jede Gerade in einen Kreis verwandelt, so wird im Raume aus der Ebene jedesmal eine Kugelfläche. Schneidet also die abzubildende Kugel eine Ebene, so wird daraus in der Abbildung der Schnitt der Bildebene mit einer Kugel, folglich ein gewisser Kreis in der Bildebene. Hiernach werden in der stereographischen Abbildung der Erdkugel aus den Breitenkreisen wie aus den Meridianen Kreise in der Bildebene. Letztere schneiden sich in zwei Punkten, den Bildern der Pole. — Wie ist also in dieser Projektion das Gradnetz zu zeichnen?

21. Wenn eine Halbkugel mit ihrem kreisförmigen Rande auf eine Ebene gedeckt ist, so möge in einem beliebigen Punkte der Kugelfläche E eine berührende Ebene an dieselbe gelegt werden. Diese Tangentialebene schneide die Grundebene in der Geraden d und die vom Punkte E auf die Grundebene gefällte Senkrechte treffe letztere im Punkte D (Fig. 36). Greifen wir nun einen beliebigen Punkt der Geraden d, etwa G, heraus und legen von ihm aus einen Berührungskegel an die Kugel. Die Berührung findet in einem Kreise statt, dessen Ebene zur Grundebene senkrecht steht. In dieser senkrechten Ebene liegen die Punkte D, E sowie die beiden Berührungspunkte der von G aus an den Grundkreis ABC gelegten Tangenten. Also: Durchläuft der Punkt F die Gerade d (Polare), so dreht sich die zugehörige Berührungssehne fortwährend um den Punkt D (Pol).

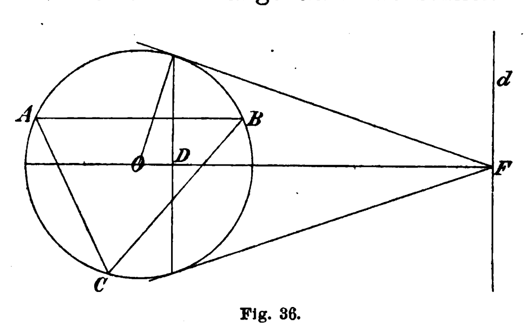


Fig. 36.

22. Man bestimme die Flächenwinkel an den Kanten der regelmäfsigen Körper.

23. Mit Hülfe der vorigen Aufgabe bestimme man Inhalt, Radius der ein- und umbeschriebenen Kugeln für diese Körper.

24. Welcher von den fünf regelmäſsigen Körpern hat bei gleicher gegebener Oberfläche den gröſsten Inhalt?

25. Zwei Ebenen A und B bilden miteinander den Neigungswinkel λ. Von jedem Punkte D der Ebene B wird ein Lot auf A herabgelassen, und der Fuſspunkt heiſst die Projektion des Punktes D. Eine Gerade der Ebene B wird dadurch als Gerade in die Ebene A projiziert (§ 9, Fig. 10).

26. In der Ebene B befinde sich ein Rechteck, dessen Inhalt F und dessen eine Seite zur Schnittgeraden mit A parallel sei. Wie groſs ist der Inhalt der Projektion dieses Rechtecks in A?

27. In der Ebene B befinde sich ein beliebiges Rechteck, dessen Inhalt F sei. Wie groſs ist der Inhalt der Projektion dieses Rechtecks? — Wie läſst sich die Lösung für eine beliebige (geschlossene) Figur verallgemeinern?

28. Über einem regelmäſsigen Dreieck als Grundfläche steht eine Pyramide mit gleichen Seitenkanten. Der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche φ und die Gesamtoberfläche F sind bekannt. Man berechne die Seite der Grundfläche, die Gröſse der Seitenkanten und den Rauminhalt des Tetraeders.

29. Man löse die der vorigen entsprechenden Aufgaben, wenn die Grundfläche der zu bestimmenden geraden Pyramide ein Quadrat, ein regelmäſsiges n-Eck ist.

30. Können auch für den geraden Kegel entsprechende Fragen gestellt werden?

31. Man bestimme die Mantelfläche des abgestumpften Kegels nach der entsprechenden Methode. Anleitung: Die Differenz der beiden Begrenzungskreise ist gleich der Projektion der Mantelfläche auf dieselben

32. Man bestimme die Oberfläche der kalten u. s. w. Erdzone.

33. Eine Kugelscheibe wird durch zwei Breitenkreise mit den Breiten φ und ψ begrenzt. Wie groſs ist ihr Rauminhalt?

34. An zwei gegebene Kugeln (Radien r, ρ, Abstand der Mittelpunkte a) ist der Berührungskegel gelegt. Man bestimme den Rauminhalt und die Mantelfläche des Kegelstumpfes, welcher durch die beiden Berührungskreise herausgeschnitten wird.

35. Man bestimme den Inhalt der Rotationskörper, und zwar a) direkt, b) unter Anwendung der Guldinschen Regel. Siehe einen einfachen Beweis derselben „100 Aufgaben“ S. 131. Als

Umdrehungsfigur betrachte man der Reihe nach ein Quadrat, ein Rechteck, ein Dreieck, ein regelmäſsiges n-Eck.

36. Man bestimme den Schwerpunkt eines Cylinders, eines Prismas, einer Pyramide, eines Kegels.

37. Man bestimme den Schwerpunkt eines Tetraeders. Man berechne den Abstand des Schwerpunktes von den Ecken, wenn die Länge der Kanten gegeben ist.

38. Wie groſs ist die Arbeit, welche erfordert wird, um ein regelmäſsiges Tetraeder mit der Kantenlänge a und dem specifischen Gewichte s um eine seiner Kanten zu wälzen?

39. Vier Punkte des Raumes sind mit gleichen Massen m belegt. Wo befindet sich der Schwerpunkt dieser vier Massenpunkte? Man löse die entsprechende Aufgabe, wenn nur drei der Massen unter sich gleich oder wenn die vier Massen paarweise gleich sind u. s. w.

40. Man bestimme den Schwerpunkt des abgestumpften Kegels. Man denke sich die Masse desselben in dem fraglichen Schwerpunkte und ebenso die Masse des Ergänzungskegels in dessen Schwerpunkt vereinigt.

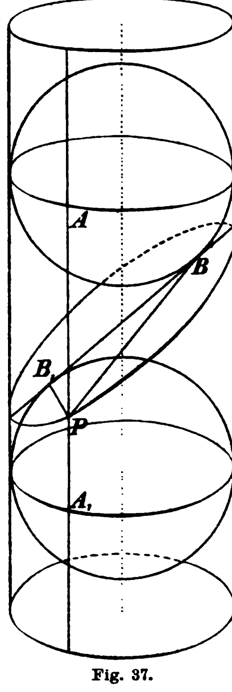


Fig. 37.

§ 19. Die Kegelschnitte.

Ein gerader Cylinder (Fig. 37) wird von einer Ebene geschnitten. Um die Figur der Schnittlinie genauer zu bestimmen, rollen wir von beiden Seiten her zwei Kugeln in den Cylinder hinein. Beide Kugeln haben denselben Radius, welcher dem Grundkreisradius des Cylinders gleichkommt, und passen daher genau in denselben hinein; genauer gesprochen: die beiden Kugeln berühren den Cylinder. Die Berührungslinien sind zwei Kreise, deren Ebenen zur Achse des Cylinders senkrecht stehen und daher überall gleichen Abstand voneinander haben. Die eine Kugel möge nun den Durchschnitt des Cylinders im Punkte B, die andere im Punkte B_1 berühren. Dann ist $PB_1 = PA_1$ und $PB = PA$, weil die von einem auſserhalb liegenden Punkte an eine Kugel gezogenen Tangenten gleiche Länge haben. Mithin ist


$PB_1 + PB = AA_1$, d. h.:

Die Schnittlinie eines geraden Cylinders mit einer Ebene hat die Eigenschaft, dafs die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes derselben von zwei festen Punkten der Ebene des Schnittes eine unveränderliche Gröfse besitzt.

Die Schnittlinie eines geraden Cylinders mit einer Ebene ist im allgemeinen eine Ellipse.

In besondern Fällen geht die Ellipse in einen Kreis oder in ein Linienpaar über.

Ein gerader Kegel (Fig. 38) möge von einer Ebene in der Weise geschnitten werden, wie es die Figur andeutet. Wir rollen wieder zwei Berührungskugeln hinein, welche den Mantel des Kegels und die schneidende Ebene berühren mögen. Der Mantel wird von jeder solchen Kugel längs einer Kreislinie berührt. Diese Kreislinie liegt in einer zur Achse des Kegels senkrechten Ebene. Daher ist das Stück AA_1 für zwei fest bestimmte Berührungskugeln in jeder Lage, welche man der betreffenden Kegelseite erteilen kann, von unveränderlicher Gröfse. Daher hat man wieder $PB_1 = PA_1$, $PB = PA$ und

$$PB_1 + PB = AA_1.$$

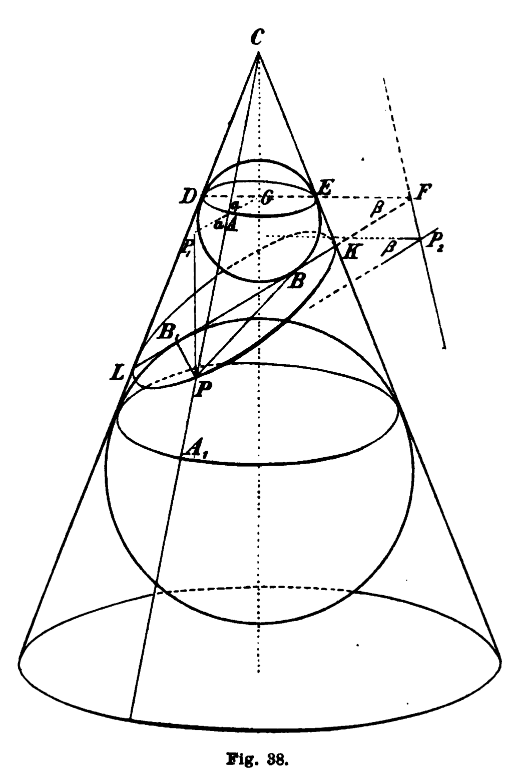


Fig. 38.

Wenn eine Ebene einen geraden Kegel in der Weise schneidet, wie es Fig. 38 angiebt, so ist der Durchschnitt eine Ellipse (oder ein Kreis).

Wir haben uns hier weniger bestimmt als beim Cylinderschnitte ausgesprochen und suchen nun für den Kegelschnitt das Gesagte zu vervollständigen.

Auf einer Ebene (einer Tischplatte) liege eine Kugel mit dem Radius r. Dieselbe werde von einem Punkte aus beleuchtet, der eine ansehnliche Höhe über der Ebene besitzt. Dann wird der Schattenkegel, den die Kugel bewirkt, durch die Ebene in einem Kegelschnitte oder in der von uns näher zu untersuchenden Linie geschnitten. In unserer Figur ist die Spitze des Kegels der leuchtende Punkt, die obere Kugel die beleuchtete Kugel und die von uns bereits betrachtete Ellipse die Schattenlinie in der Ebene PBB_1. Sinkt nun der leuchtende Punkt tiefer hinab, bis er eine Entfernung von der Tischplatte erhält, welche gleich dem Durchmesser der Kugel ist, so entflieht ein Punkt der Schattenlinie in unendliche Entfernung. Denn der zum höchsten Punkte der Kugel gezogene Strahl wird der Tischplatte parallel. Die fragliche Kurve heifst Parabel. Die schneidende Ebene (Fig. 38) wird der Seite des Kegels parallel.

Sinkt der leuchtende Punkt noch tiefer, so entfliehen zwei Punkte der Schattenkurve in unendliche Entfernung. Die schneidende Ebene trifft dann nur die eine Seite des Kegels, dagegen die Verlängerung der andern. Stellen wir uns die Seiten des Kegels als unendlich lange gerade Linien vor, so verwandelt er sich in einen Doppelkegel. Die schneidende Ebene trifft beide in der Spitze des Kegels zusammenhängende Mäntel des Doppelkegels. Beschreibt man in beide Kegelteile Kugeln, welche die Mäntel und die schneidende Ebene berühren, so kann man zeigen, dafs für jeden Punkt der Kurve die Differenz seiner Entfernungen von den Berührungspunkten der Kugeln eine unveränderliche Gröfse hat. Die Kurve ist eine Hyperbel.

Um alle drei Kurven in einfachster Weise der Rechnung zugänglich zu machen, bedienen wir uns folgender Darstellung. Die Ebene DAE (Fig. 38) und die Ebene PBB_1 schneiden sich in einer Geraden. Diese Gerade heifst Leitlinie des Kegelschnitts. Da beide Ebenen zur Ebene CDE senkrecht stehen, so ist auch die Leitlinie zur Ebene CDE senkrecht (§ 10, 6). Ein Punkt der Leitlinie ist F und der Winkel $DFB = \beta$ der Neigungswinkel der Ebenen DAE und PB_1B, also gegeben. Der gleichfalls gegebene Winkel $CED = CDE$ sei mit α bezeichnet.

Nun fällen wir von P auf die Ebene DAE ein Lot mit dem Fufspunkt P_1, ebenfalls von P auf die Leitlinie ein Lot, dessen Fufspunkt P_2 sei. Dann ist auch P_1P_2 senkrecht zur Leitlinie

und folglich $\measuredangle P_1 P_2 P = \beta$, $\sin\beta = \frac{PP_1}{PP_2}$. Andererseits ist $\frac{PP_1}{PA} = \sin CAG = \sin\alpha$. Daher:

$$\frac{PA}{PP_2} = \frac{PB}{PP_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Jeder Kegelschnitt hat die Eigenschaft, daſs der Quotient, gebildet aus dem Abstande eines Kurvenpunktes von einem festen Punkte (Brennpunkte) als Zähler und dem Abstande desselben Kurvenpunktes von einer festen Geraden (der Leitlinie) als Nenner, eine unveränderliche Gröſse hat.

Ist der Quotient kleiner als eins, $\beta < \alpha$, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse; ist er gleich eins, $\beta = \alpha$, so ist der Kegelschnitt eine Parabel; ist er gröſser als eins, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

Durch diesen Satz ist die Theorie der Kegelschnitte erstens unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt gebracht und zweitens der Stereometrie völlig entrückt.

Ist der Achsenschnitt des Kegels und etwa LK fest gegeben, so erhalten wir alsbald DE, mithin F und B. Nunmehr zeichnen wir in einer andern Ebene, nämlich derjenigen des Kegelschnitts, zwei sich senkrecht schneidende Geraden, nennen den Kreuzungspunkt F und tragen auf der einen die Punkte K, B, L in der gegebenen Weise ein. Dann können wir auf einer gegebenen Geraden einen Punkt ermitteln, dessen Abstände von B und von der andern Senkrechten sich verhalten wie $KB : KF$.

Ein Kegelschnitt hat im allgemeinen zwei symmetrisch gelegene Leitlinien. Für den Kreis entflieht die Leitlinie in unendliche Entfernung.

Da $KB : KF = LB : LF$, so sind $L, K; B, F$ harmonisch zugeordnet; die Leitlinie ist bezüglich des Kegelschnittes Polare des Brennpunktes B.

Die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte sind besonders geeignet, den Lernenden in dieselben einzuführen. Dabei ist es zweckmäſsig, die drei Kegelschnitte zunächst getrennt zu behandeln.

1. Aufgabe. Gegeben eine Ellipse durch ihre Brennpunkte und ihre groſse Achse. Man bestimme ihre Schnittpunkte mit einer gegebenen geraden Linie.

Lösung. Man beschreibe um den einen Brennpunkt mit der groſsen Achse einen Kreis und bestimme einen Hülfskreis so, daſs

er den erstern berührt, durch den zweiten Brennpunkt geht und seinen Mittelpunkt auf der gegebenen Geraden hat. Dieser Mittelpunkt löst die Aufgabe.

Für die Hyperbel ist die Lösung genau gleichlaufend. Vgl. „100 Aufgaben" Nr. 18.

Für die Parabel lautet die entsprechende Aufgabe so:

2. Aufgabe. Gegeben eine Parabel durch ihre Leitlinie und ihren Brennpunkt. Man bestimme die Schnittpunkte der Parabel mit einer gegebenen geraden Linie.

Lösung. Man suche auf der gegebenen Geraden den Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Leitlinie berührt und durch den Brennpunkt geht.

3. Aufgabe. Man bestimme die Figur der drei Kegelschnitte.

Lösung durch sorgfältige Zeichnung. Dann zeige man: die Ellipse zerlegt die Ebene in zwei Gebiete, ein begrenztes und ein unbegrenztes. Heifsen die Brennpunkte B, C, die grofse Achse s, so ist für jeden Punkt P des begrenzten Gebietes

$$PB + PC < s,$$

für jeden des unbegrenzten

$$PB + PC > s.$$

Im erstern Falle liegt P innerhalb, im letztern aufserhalb der Ellipse.

Die Hyperbel zerlegt die Ebene in drei unbegrenzte Gebiete. Zwei derselben werden von den hohlen Kurvenästen eingefafst und enthalten die Brennpunkte. Für dieselben ist bezüglich für $PB > PC$ oder $PB < PC$:

$$PB - PC > d, \quad PC - PB > d.$$

Für das dritte Gebiet ist ebenso bezüglich

$$PB - PC < d, \quad PC - PB < d;$$

auch enthält es die Punkte $PB = PC$.

Die erstgenannten Gebiete werden als innerhalb, das dritte als aufserhalb der Hyperbel liegend bezeichnet. Für einen Hyperbelpunkt ist $PB - PC = d$ oder $PC - PB = d$.

Die Parabel zerlegt die Ebene in zwei unbegrenzte Gebiete. Das den Brennpunkt enthaltende hat die Eigenschaft, dafs jeder Punkt desselben vom Brennpunkte einen kleinern Abstand hat als von der Leitlinie. Das andere Gebiet enthält die Leitlinie und hat die entgegengesetzte Eigenschaft. Ersteres wird als innerhalb, letzteres als aufserhalb der Parabel liegend bezeichnet.

Erklärung. Tangente eines Kegelschnittes ist eine Linie, welche mit demselben nur einen Punkt, den Berührungspunkt gemeinsam hat, während alle übrigen Punkte aufserhalb des Kegelschnittes liegen.

4. Aufgabe. In einem Punkte A einer Ellipse an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

Lösung. Man verbindet A (Fig 39) mit den Brennpunkten B und C und halbiert den Aufsenwinkel der beiden Brennstrahlen AB, AC, so erhält man die gesuchte Tangente.

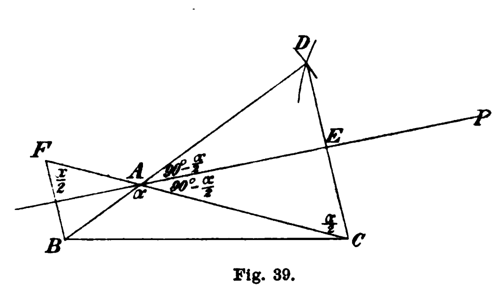


Fig. 39.

Beweis. Zieht man $CE \perp AP$, $DE = CE$, so ist $DEA \cong CEA$, daher DAB eine gerade Linie; $DB = CA + AB = s$. Dagegen ist $PB + PC = PB + PD > s$.

5. Aufgabe. In einem Punkte A einer Hyperbel an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

Lösung. Man verbindet A mit den Brennpunkten B und C und halbiert den Winkel der Brennstrahlen. Dann erhält man die gesuchte Tangente (Fig. 40).

Fig. 40.

Beweis. Zieht man BF, dessen Mittelsenkrechte AP ist, so wird ACF eine gerade Linie;

$$AB - AC = AB - AD = d.$$

Dann ist auch AE Mittelsenkrechte zu DC. Nun ist

$$PB - PC = PB - PD < d.$$

Also liegt P aufserhalb der Hyperbel.

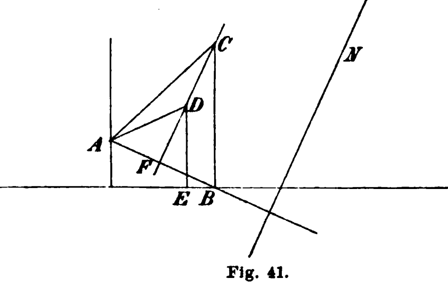


Fig. 41.

6. Aufgabe. In einem Punkte C einer Parabel an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

Lösung. A (Fig. 41) sei der Brennpunkt, L die Leitlinie der Parabel. Wir ziehen CA und fällen $CB \perp L$. Die Halbierungslinie des Winkels ACB löst die Aufgabe.

Beweis. $DA = DB$, weil CF Mittelsenkrechte zu AB ist. Ist $DE \perp L$, so ist $DB > DE$, also auch $DA > DE$, mithin liegt D aufserhalb der Parabel.

An diese Aufgaben kann man die folgende schliefsen:

An einen Kegelschnitt eine Tangente zu ziehen, wenn ein Punkt der Tangente oder die Richtung derselben bekannt ist.

Ist N eine Gerade, welcher die Parabeltangente parallel werden soll (Fig. 41), so ist die Lösung durch die Figur hinreichend angedeutet. Die übrigen Aufgaben sind „100 Aufgaben“ S. 73, 74 und 76 behandelt.

§ 20. Anhang.

Zusammenstellung einiger Vorschriften über Figurenzeichnung.

Die wirkliche Darstellung eines Körpers im Raume, die Herstellung eines Modells ist oft schwierig oder unzweckmäfsig. Es ist aber möglich, räumliche Gebilde in einer Ebene darzustellen, und zwar so, dafs man aus diesen Darstellungen (Bildern) eine durchaus genügende Kenntnis der räumlichen Gebilde erhält. Die einfachste Art, räumliche Gebilde in einer Ebene darzustellen, ist die, dafs man von hinreichend vielen Punkten des abzubildenden Körpers Senkrechte auf die Bildebene fällt und deren Fufspunkte durch solche Linien verbindet, die der Gestalt des Körpers entsprechen. Diese Abbildung nennt man die gerade, orthogonale oder Normalprojektion. Sie wird auch mit dem Namen Rifs bezeichnet. Sie heifst Grundrifs, wenn die Bildebene wagerecht liegt; Aufrifs, wenn sie aufrecht vor dem Zeichner steht; Seitenrifs, wenn sie aufrecht, aber neben dem Zeichner steht. Grundrifs, Aufrifs und Seitenrifs stimmen einigermafsen überein mit der Ansicht eines Körpers von oben, von vorn, von der Seite.

Das Bild eines Punktes ist der Fufspunkt des von ihm auf die Bildebene gefällten Lotes.

Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade (S. 47, Übungssatz 25).

Das Bild einer Strecke ist eine Strecke, die kleiner, höchstens gleich der abgebildeten Strecke ist (§ 9, Fig. 10).

Das Verhältnis, in welchem eine Strecke durch einen Punkt geteilt wird, bleibt in der Abbildung erhalten. Denn es ist (Fig. 10) $EA : EB = FC : FD$.

Das Bild eines rechten Winkels ist wieder ein rechter Winkel, wenn nur ein Schenkel der Bildebene parallel ist. Denn die beiden Ebenen, welche durch seine Schenkel senkrecht zur Bildebene gefällt werden, stehen auch zu einander senkrecht. Dagegen wird ein spitzer Winkel, wenn nur ein Schenkel der Bildebene parallel ist, kleiner (vgl. S. 22, Aufgabe 8). Betrachtet man den Nebenwinkel, so folgt, dafs ein stumpfer Winkel sich vergröfsert.

Parallele Gerade bleiben auch in der Abbildung parallel; denn die durch dieselben zur Bildebene gefällten Ebenen sind nach S. 19 Nr. 7 und S. 20 Nr. 12 einander parallel, daher folgt die Richtigkeit der Behauptung aus dem folgenden Satze S. 20 Nr. 13.

Wenn man eine beliebige ebene Figur abbildet, so bleiben alle diejenigen Linien (Seiten, Diagonalen, Transversalen) ihrer Gröfse nach unverändert, welche der Bildebene parallel sind. Alle übrigen werden verkürzt; am meisten diejenigen, welche zur gedachten Richtung senkrecht stehen.

Das Bild eines Kreises ist eine Ellipse, deren grofse Achse gleich dem Durchmesser des Kreises ist. Dieselbe liegt parallel dem Schnitte der Kreisebene mit der Bildebene (vgl. „100 Aufgaben“ S. 79).

Nach diesen Sätzen ist es nicht schwer, den Rifs einer andern einfachen Figur, z. B. eines geraden Kegels, herzustellen. Die Grundfläche wird eine Ellipse, der Mantel wird begrenzt durch die vom Bilde der Spitze an diese Ellipse gezogenen Tangenten. Das Bild der Kugel ist immer ein Kreis mit gleichem Durchmesser.